HISTÒRIA DE LA MATEMÀTICA

La Matemàtica a l'Antiguitat. De la ciència àrab al Renaixement. El naixement de la matemàtica moderna.

Materials de l'assignatura

Mª Rosa Massa Esteve

Facultat de Matemàtiques i Estadística

Universitat Politècnica de Catalunya

Curs 2014-2015

Nota: Per a l'elaboració d'aquest material en alguns casos he fet servir reproduccions de textos de diversos autors, com a suport pel treball a l'aula. En tots els casos n'he indicat la font.

Història de la Matemàtica. Introducció

Consideracions sobre l'ensenyament de la història de la matemàtica

Quan ensenyem la història de la matemàtica als alumnes, és imprescindible analitzar els descobriments en el context del seu propi lloc i temps. Cal tenir en compte el passat, els contemporanis i el context social i econòmic. Els relats cronològics de la història de la matemàtica poden fer que els descobriments es presentin linealment seguits i s'aporti un missatge de continuïtat que no és real. L'objectiu de l'historiador de la matemàtica no és recopilar llistes d'esdeveniments i llistes d'autors, sinó aportar llum sobre les influències i les interaccions, ajudant a entendre l'origen dels conceptes.

Un altre punt interessant és que els descobriments matemàtics solen venir associats a la gent clau, no als científics menys coneguts o de la perifèria, no a les dones, ni a les societats no europees. De fet es coneixen moltes fonts originals, i molts estudis sobre la matemàtica europea, en canvi comparativament menys sobre la matemàtica a Xina, Índia o Amèrica. Per tant, quan expliquem la història de la matemàtica cal també tenir en compte altra gent que fa matemàtiques, com ara els personatges de la perifèria, les dones, els professors, els enginyers o bé els empresaris. Hem de pensar en la matemàtica com una disciplina arrelada a la societat i a la cultura, només cal recordar que són moltes les persones que fan avançar la matemàtica resolent problemes de la societat a cada època i lloc.

L'assignatura història de la matemàtica es proposa, doncs, donar a conèixer les fonts en què es basa el saber matemàtic del passat, prenent en consideració els punts anteriors. Al llarg del curs es presenta una pinzellada de la matèria que podem anomenar "matemàtiques" dins les diferents cultures del passat, des de la Mesopotàmia a l'Europa del segle XIX, tot fugint del missatge de continuïtat implícit a l'ensenyament de les matemàtiques que coneixen.

També cal reflexionar i preguntar-se: els objectes matemàtics, són els mateixos a través dels segles? Per exemple, el cercle, l'arrel de 2, el nombre pi,… O be, els teoremes matemàtics romanen invariants, a través de la història, en les diferents cultures? Per exemple, el teorema de Pitàgores, la resolució d'equacions de segon grau,… Es pot parlar raonablement de la resolució d'un problema que es va plantejar fa 2000 anys? A més, es tracta de treballar algunes aplicacions de la matemàtica, com ara de l'ús del càlcul infinitesimal a la física, i a la vegada posar de manifest les relacions socioculturals de les matemàtiques.

Aquesta "manera d'introduir" la història de la matemàtica permetrà als futurs matemàtics reconèixer els canvis més significatius en la disciplina matemàtiques i sobretot reflexionar sobre el desenvolupament del seu pensament matemàtic.

Algunes referències bibliogràfiques (bàsica)

Boyer, Carl B. (1968). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza, 1986.

Chemla, Karine (2012). *The History of mathematical proof in ancient traditions.* Cambridge: CambridgeUniversity Press.

Fauvel, John; Gray, Jeremy eds. (1987).*The History of Mathematics: A Reader*. Londres: MacMillan.

Gillispie, Charles C. ed., (1970-1980). *Dictionary of Scientific Biography.* Nova York: Scribners.

Grattan-Guinness, Ivor ed. (1994*).Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*.Londres: Routledge.

Grattan-Guinness, Ivor (1997). *The Fontana/Norton History of the Mathematical Sciences*.*The Rainbow of Mathematics.*Londres: Fontana; 1998, Nova York: Norton.

Katz, Victor (ed.), (2007). *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam: a sourcebook.* Princeton: PrincetonUniversity Press.

Katz, Victor; Hunger Parshall, K. (2014). *Taming the unknown: A History of Algebra from Antiquity to the Early twentieth century.* Princeton: Princeton University Press.

Kline, Morris (1972). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. 3 vol. Madrid: Alianza, 1992.

Rommevaux, S; Spiesser, M. and Massa-Esteve, M. R. (2012). *Pluralité de l'algèbre à la Renaissance.* Paris: Honoré Champions.

Serres, Michel (1991). *Historia de las Ciencias.* Madrid: Cátedra.

Stedall, Jacqueline. (2008). *Mathematics emerging. A sourcebook 1540-1900.*Oxford: OxfordUniversity Press.

Stedall, Jacqueline (2012). *The History of Mathematics .A Very Short Introduction.*Oxford: OxfordUniversity Press.

Struik, Dirk J. (1969). *A Source Book in Mathematics, 1200–1800*. Princeton: Princeton University Press, 1986 2na ed.

Tema 1. La Matemàtica a l'Antiguitat

1.1 Les tauletes cuneïformes

La matemàtica a Mesopotàmia (3.200 aC.- 600 aC.)

El 3000 aC i coincidint amb el desenvolupament de la metal·lúrgia van començar a sorgir assentaments a les terres fèrtils de les valls dels rius, ja que les civilitzacions depenien de l'agricultura. Així a Mesopotàmia, a la vall del Tigris i l'Èufrates; a Egipte, a la vall del Nil; poc després a la vall de l'Indo (Índia) i a la vall del riu Groc (Xina). Degut a les crescudes dels rius es van organitzar segons les seves necessitats, creant diferents tecnologies i diferents sistemes polítics i socials.

Les terres que formaven Mesopotàmia havien estat ocupades pels sumeris (3.200 aC), civilització que està considerada com la més antiga del món. Van construir les primeres ciutats, com Ur i Lagash, sobre pujols i les van fortificar per defensar-se d'altres pobles. Cada ciutat es governava a si mateixa: eren estats independents. Els sumeris tenien ciutats estat amb poblacions de 8000 i 12000 habitants. Cada ciutat i territori pertanyia a un déu o a una deessa i tenia un súmmum sacerdot. Durant el III mil·lenni aC, la civilització accàdia va sotmetre les grans ciutats estat sumèries, convertint-se en el primer gran imperi de la història. Així, van assimilar la cultura dels pobles conquerits i, com els sumeris, van adquirir el sistema sexagesimal. A final del segle XXIV aC l'imperi accadi va caure davant la pressió dels pobles bàrbars del Zagros. Al 1900 aC, després d'uns segles de caos i anarquia a la regió, els babilonis liderats per Hammurabi van prendre el control de la regió i van subjugar les restes de les civilitzacions sumèria i accàdia. Els babilonis van aprendre d'ells el sistema de numeració sexagesimal (base 60).

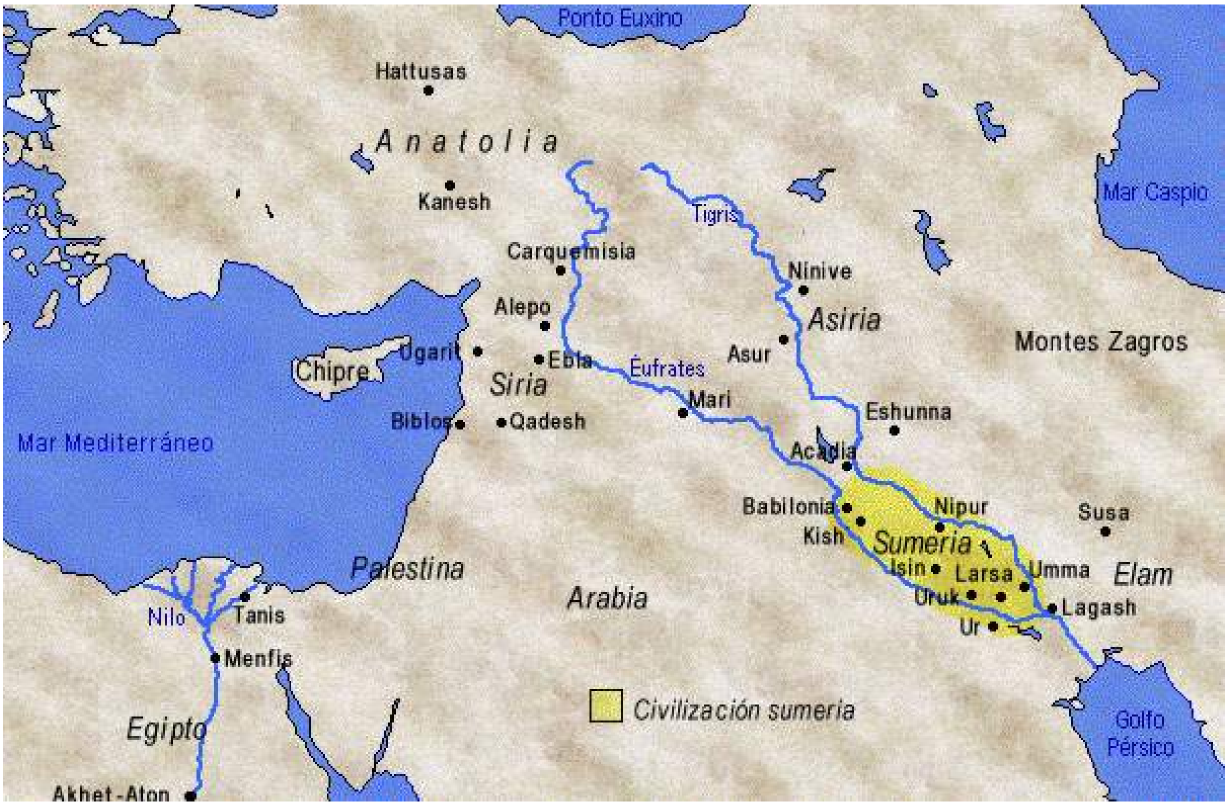


Figura 1. Mapa de Mesopotàmia

(http: //www.proyectosalonhogar.com)

Obres hidràuliques

Mesopotàmia era un territori pla, quan els rius tenien les crescudes havien de emmagatzemar l'aigua. Cada ciutat tenia el seu propi consell de regadiu ja que el subministrament d'aigua per regar les terres era imprescindible. Els canals i els pous s'havien de netejar constantment. Degut a les inundacions, van ser construïts i conservats dics, es van canalitzar les aigües cap els camps que finalment es drenaven. Els problemes de les crescudes i les solucions tecnològiques que s'hi van donar van diferir notablement a Egipte i a Mesopotàmia.

Els temples

Adoraven a molts deus i els temples eren molt importants en aquesta societat. Es diu que les gents que habitaven la Mesopotàmia eren de filosofia pessimista, amb por als dimonis i als esperits dolents.

Es produïa economia de temple, o sigui es donaven les collites al sacerdot i ell ho repartia. Els tallers del temple, que produïen teixits i altres articles, van donar poc a poc pas als gremis d'artesans lliures.

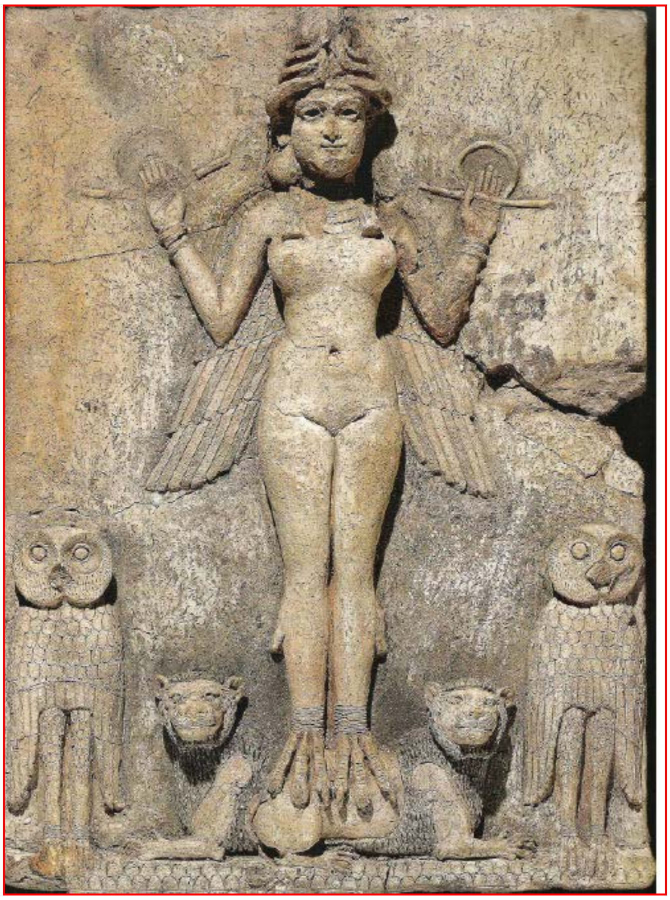


Figura 2. Deessa Ixtar Babilònia (1900 aC.) Wikipedia.

L'escriptura i la matemàtica

L'educació tant a Mesopotàmia com a Egipte era molt important i era impartida pels escribes. S'ensenyava als alumnes l'ordre de les coses tal com el van establir els déus al principi.

A Mesopotàmia l'escriptura, feta per escribes, era cuneïforme i en tauletes d'argila. Consistia en la incisió de traces en forma de cunya sobre argila tova, material abundant en la vall del Tigris i l'Èufrates. Un cop secades al Sol o cuites al foc, les tauletes s'endurien i l'escriptura adquiria caràcter permanent.

La matemàtica "babilònica" (1500 aC) va ser transmesa per escribes i bàsicament utilitzada per càlculs relatius a problemes de la vida real. D'entre les tauletes d'argila en escriptura cuneïforme, realitzades pels babilònics, n'hi ha moltes que contenen taules numèriques (taules de multiplicació, taules de recíprocs,...). Les tècniques que feien servir per a la construcció d'aquestes taules numèriques constituïen el nexe entre els càlculs i la realitat administrativa i d'enginyeria. Per exemple, l'algorisme de resolució d'equacions algebraiques de segon grau ja es pot deduir a partir dels problemes resolts a les tauletes babilòniques.

Per representar els números a les tauletes, utilitzaven falques verticals per escriure els números del 1 al 9 (tantes falques com el número) i falques horitzontals per escriure les desenes, del 10 al 50 (tantes falques com desenes). Vegeu la taula de multiplicar del 7 on es pot apreciar el sistema sexagesimal que empraven.

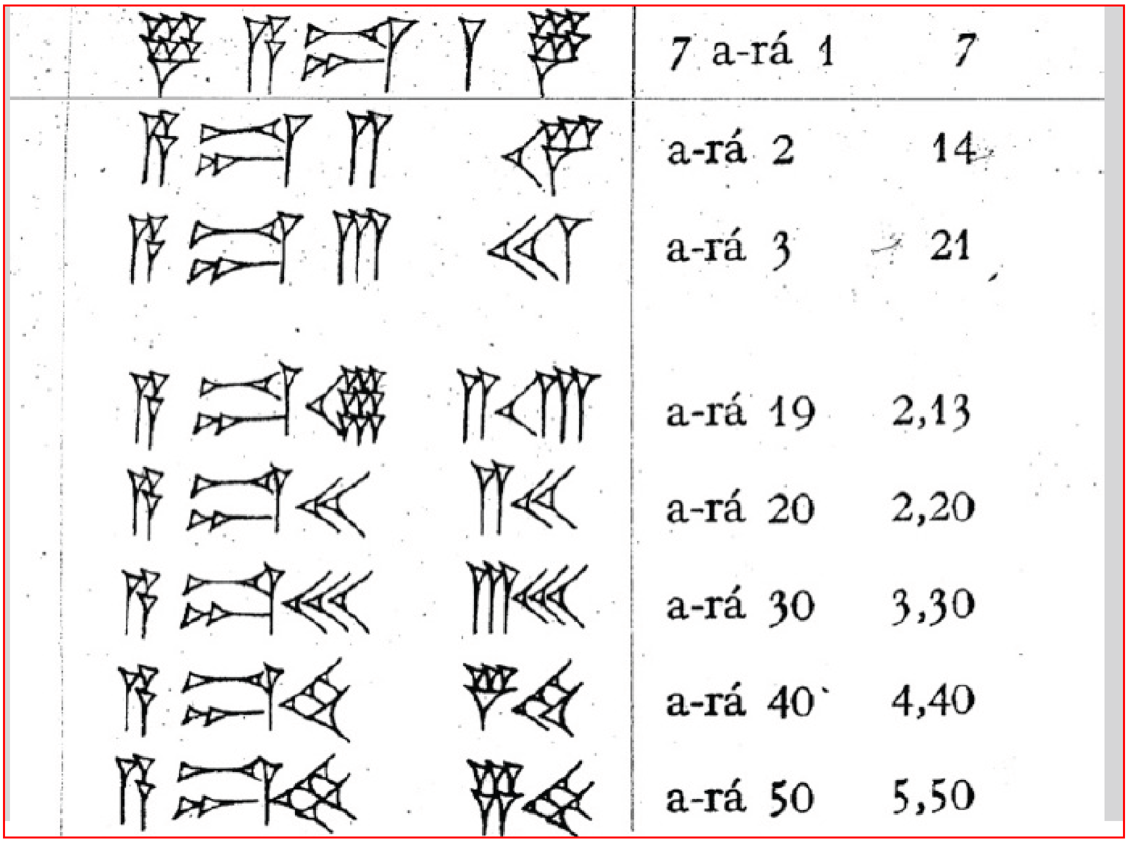


Figura 3. La taula del 7

La imatge següent mostra la més famosa de les tauletes matemàtiques, preservada a la George Arthur Plimpton Collection de la Universitat de Columbia. Hi ha moltes interpretacions de la terna de números escrita en aquesta tauleta. Té unes dimensions aproximades de 13 x 9 cm, i es va trobar cap al 1920 en unes excavacions que es van fer a la ciutat de Larsa. Va anar a parar a mans de l'editor novaiorquès Georges Plimpton, el qual la va donar, quan va morir, a la Universitat de Columbia. Com que corresponia al número 322 del seu catàleg, la tauleta és coneguda pel nom de *Plimpton 322*.

Figura 4. La famosa tauleta Plimpton 322

Els problemes matemàtics a Babilònia. Exercicis per practicar.

Els babilònics eren capaços de calcular àrees de camps i volums de canals, i van escriure moltes tècniques de resolució de problemes especialment en el camp de l'àlgebra. Per exemple, aquesta tauleta conté problemes matemàtics resolts.

Els babilònics també van formular un algorisme consistent en una sèrie d'instruccions (sense cap explicació) per a trobar solucions concretes a problemes que avui es descriurien mitjançant una equació de segon grau. Així, actualment escriuríem: $ax^2 + bx + c = 0$ i l'equació es resol substituint els valors de "a", "b" i "c" a la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Prenent *"a=1"*, (observeu que això sempre es pot fer si $a \neq 0$) podem escriure aquesta solució de la manera següent:

$$x = (-b/2) + \sqrt{(b/2)^2 - c}$$

Aquesta versió de la solució és la que anirem trobant al llarg de la història. Veiem aquestes instruccions que en les tauletes estan numerades.

Solution

"factor and inverse 2; 30"	$x + y = 2.5$, $xy = 1$
. "by 0;30 multiply: 1;15"	$2.5 \cdot \frac{1}{2} = 1.25$
. "1;15 by 1;15 multiply: 1;33,45"	$1.25 \cdot 1.25 = 1.5625$
. "1 subtract from this: 0;33,45"	$1.5625 - 1 = 0.5625$
. "what must one multiply by what to obtain 0;33,45? 0;45 "	$\sqrt{0.5625} = 0.75$
. "0;45 to 1;15 add: 2-factor"	$1.25 + 0.75 = 2[= x]$
. "0;45 from 1;15 subtract: 0;30-inverse"	$1.25 - 0.75 = 2[= y]$

Figura 5. Taula del llibre de Bashmakova-Smirnova (2000, p. 4))

HISTORIA MATHEMATICA **25** (1998), 366–378
ARTICLE NO. HM982209

Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289 in Context

David Fowler* and Eleanor Robson†

**Mathematics Institute, University of Warwick, Coventry CV4 7AL, United Kingdom*
†Oriental Institute, University of Oxford, Pusey Lane, Oxford OX1 2LE, United Kingdom

Nous considérons plusieurs aspects du rôle et de l'évaluation de l'approximation à quatre places sexagésimales de $\sqrt{2}$ sur cette tablette paléo-babylonienne. En nous référant à l'état des connaissances quant aux textes scolaires paléo-babyloniens, nous montrons comment ce texte est très probablement un exercice scolaire exécuté par un apprenti scribe qui a obtenu l'approximation à partir d'une liste de coéfficients. Nous décrivons en bref ces listes de coéfficients, ainsi que leur utilisation dans les problèmes de géométrie. Nous considérons d'autres textes traitant de racines carrées , et pour les évaluer nous dérivons un algorithme qui est en accord avec tous les exemples paléo-babyloniens connus; ceci à partir d'une construction géométrique simple du type qui semble être charactéristique de beaucoup d'autres procédures paléo-babyloniennes. © 1998 Academic Press

Figura 6. Article on s'explica com els babilònics solucionaven les arrels quadrades (Fowler i Robson, 1998). Exercici pràctic.

Consideracions sobre la matemàtica babilònica

A Mesopotàmia tenim a l'abast fonts matemàtiques originals en forma de tauletes d'escriptura cuneïforme. Les matemàtiques no estan lligades a la noció de prova. Els algoritmes, que són numèrics, són sistematitzats, encara que no hi trobem enunciats generals.

A l'algoritme de resolució de l'equació de segon grau, les tècniques donaven les passes a seguir sense cap demostració, ni cap símbol (ni lletres ni signes), utilitzant tauletes d'arrels i de potències que tenien fetes. Sempre empraven nombres concrets i solucionaven problemes de la vida real.

Tema 1. La Matemàtica a l'Antiguitat

1.2 Els papirs egipcis

Egipte va estar habitat primer per tribus independents i poc abans d'acabar els temps prehistòrics aquests grups es van unir sota uns monarques poderosos -els faraons- que governaven les províncies del territori a través de governadors.

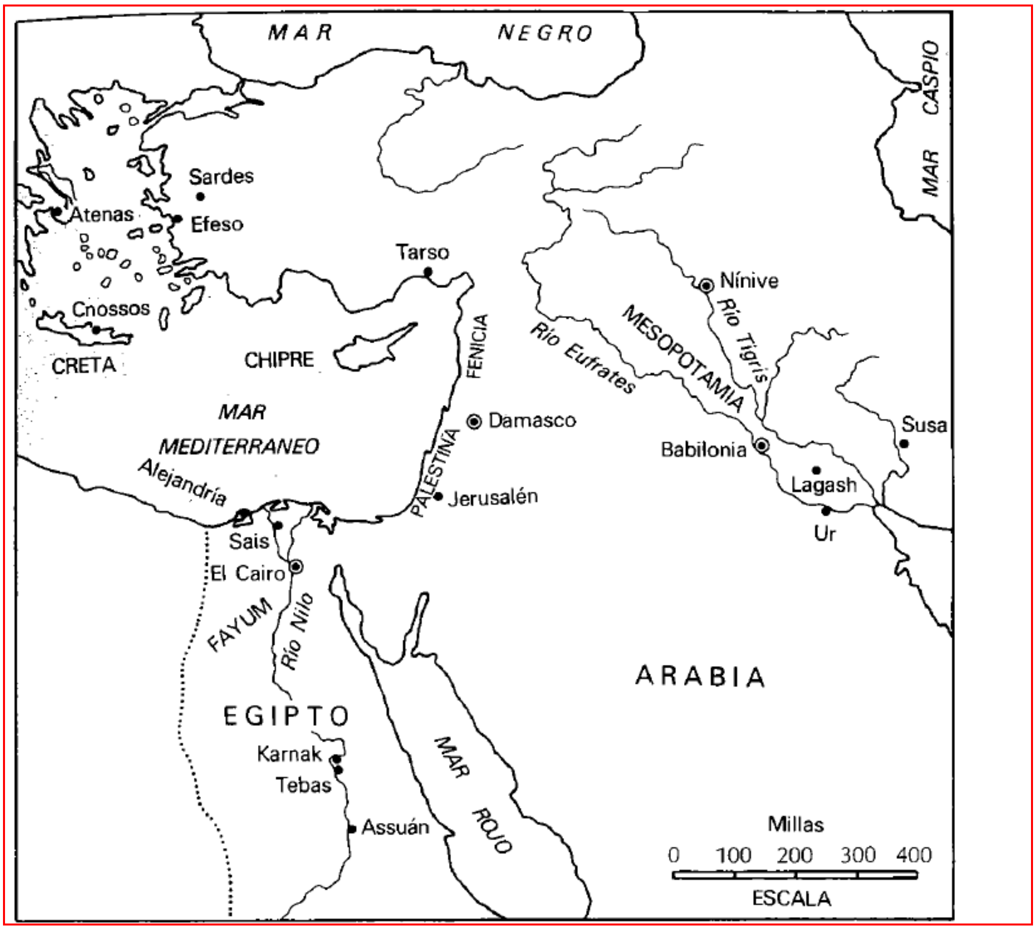


Figura 7. Mapa d'Egipte (Serres, 1991)

Les ciutats egípcies mai van competir econòmicament com ho van fer les mesopotàmiques, ni els temples van dominar l'economia fins segles posteriors.

Van coexistir els artesans lliures i els tallers dels temples i uns i altres es van desenvolupar a la vegada. Els egipcis eren aficionats a totes les coses bones de la vida, una vida que volien gaudir més allà de la tomba sense haver de pagar impostos ni treballar

Obres hidràuliques

A Egipte , la crescuda anual del Nil, es prestava admirablement al regadiu de la conca. Els faraons, van establir "cases de l'aigua" a cada província. Van construir pous per guardar l'aigua i més tard maquinària per elevar l'aigua i transportar-la.

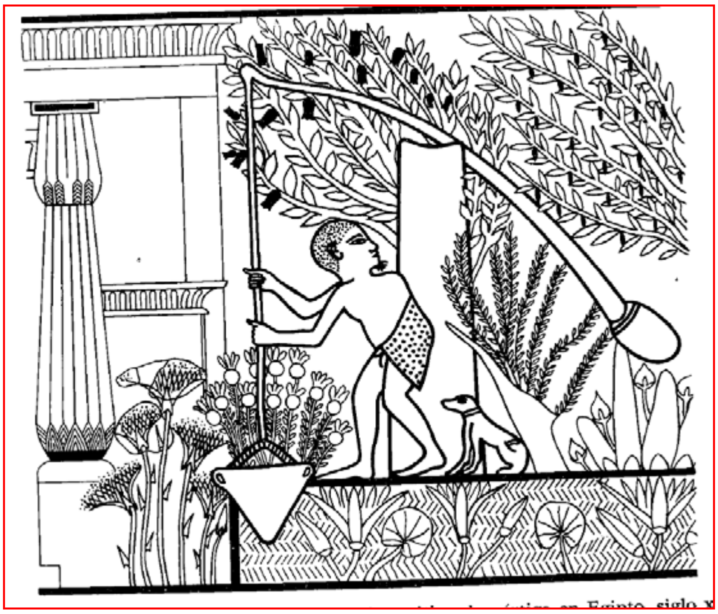


Figura 8. Regant. Dispositiu de perxa, XIII aC. A Kranzberg (1981)

Procés de les matèries primeres

Es molia el blat per fer farina. El molí era manual, una pedra i la dóna passava contínuament una altra pedra per sobre, fins que el gra quedava mòlt.

Les begudes alcohòliques eren elaborades per fermentació tant a Egipte com a Mesopotàmia. La cervesa preparada amb ordi era una beguda popular, en canvi el vi només el bevien els rics. Les olives i els raïms eren premsats en unes premses especials com podem apreciar a la imatge següent.

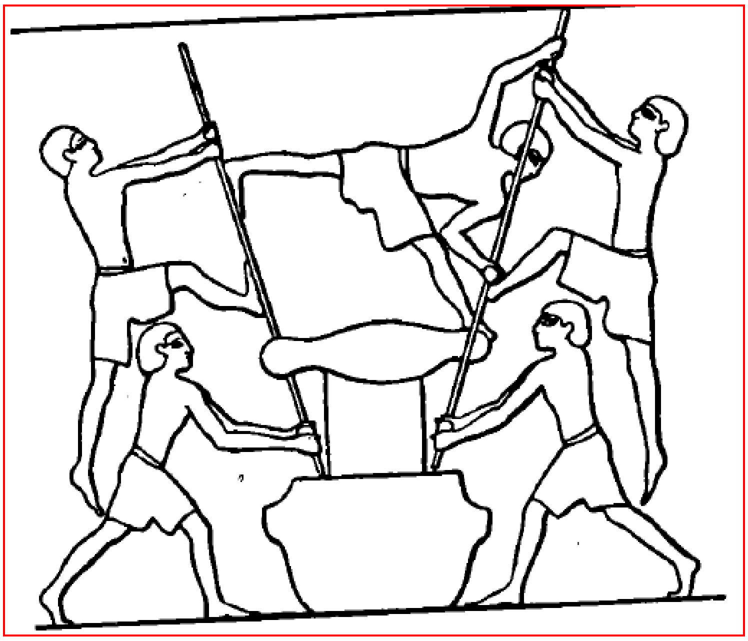


Figura 9. Exprimint el raïm (Kranzberg, 1981)

Productes textils

Mesopotàmia va ser un gran productor de llana. La teixien, blanquejaven i tintaven. Per esquilar les ovelles feien servir dos ganivets de ferro enganxats. A Egipte la llana es considerava impura i només es podia utilitzar en vestits que no toquessin a la pell.

Egipte va ser el primer país productor de lli. El cotó es filava a l'Índia 2.500 aC però a Mesopotàmia fins a 700 aC va ser desconegut. La seda, en el segle IV aC es produïa a l'illa de Cos i dos segles més tard a Alexandria s'importava de la Xina.

La filatura, el tint i el blanqueig eren practicats a tots dos llocs. S'emprava el colorant anomenat "púrpura marina".

Metal·lúrgics i terrissaires

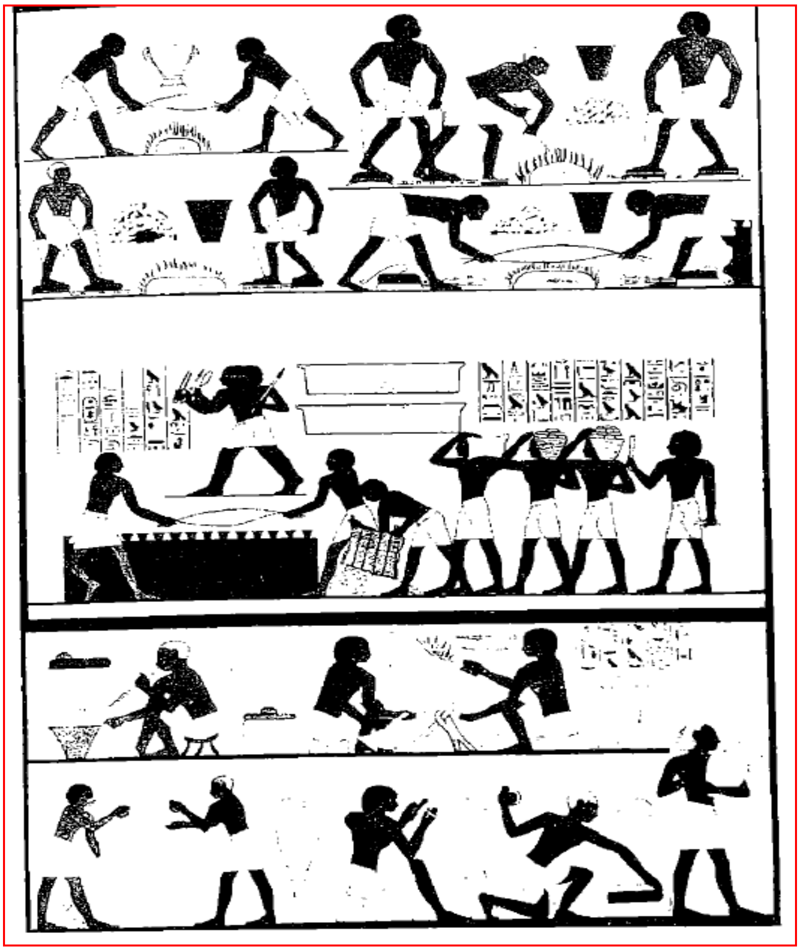


Figura 10. Terrissaires en murals de paret (Kranzberg, 1981)

Els articles de terrissa i ceràmica eren produïts per artesans. Un dels avenços va ser la roda de terrissaire que es va trobar a Uruk (3.250 aC).També treballaven el vidre.

Els artesans d'Egipte i Mesopotàmia van produir articles d'excel·lent qualitat. Es formaven gremis d'artesans lligats a organitzacions religioses, treballaven junts per fer ofrenes.

La matemàtica egípcia

La matemàtica egípcia ve relacionada amb les tècniques de construcció de grans monuments, tals com les piràmides, els obeliscs i els colossos.

La majoria de les seves tècniques matemàtiques es troben escrites sobre papirs. Els papirs eren fulles premsades i secades dels joncs del Nil, i es pintaven amb pinzell mullat amb colorants.

Amb el descobriment de la Pedra Rosseta el físic Thomas Young (1733-1829) del 1799 al 1820 va fer el primer diccionari de les paraules egípcies antigues. El problema d'interpretar el llenguatge egipci va ser solucionat.

Els egipcis tenien tres estils diferents d'escriptura: jeroglífic (objectes, plantes, animals,...), hieràtic (utilitzat pels sacerdots) i demòtic (utilitzat pel poble). Les fonts matemàtiques que es conserven estan escrites en estil hieràtic, es pot citar el Papir Rhind (1650 aC), Papir Moscú (1850 aC), Papir Reisner (1880 aC), Papir Berlin(1.850 aC), Papir Kahun (1.850 aC) i alguns més.

Figura 11. El Papir Rhind (aprox. 1650 aC, Google Imatges)

El Papir Rhind (té 6 metres de llarg i 33 cm d'ample, per les dues cares) i es troba ara al British Museum de Londres. El seu nom deriva de l'anglès Alexander Henry Rhind que el va comprar a Luxor el 1858. L'escriba Ahmés diu que és una còpia d'un papir de feia dos-cents anys i al començament hi ha una cita on explica que era un recull del saber d'aquell moment:

un complet estudi de totes les coses, dintre de tot el que existeix coneixement i secrets

El papir conté 87 problemes matemàtics de contingut aritmètic, algebraic i geomètric. Existeixen transcripcions amb notes del Papir Rhind de 1877, 1923 i 1927.

Contingut del Papir Rhind

1 - 6 Repartiment de 1,2,6,7,8 y 9 barres entre 10 homes

7 – 20 Multiplicació de fraccions

21 – 23 Subtracció

24 – 29 Trobeu números (28 y 29) i equacions resoltes per "regula falsi" (24 a 27)

30 – 34 Equacions lineals més complicades resoltes mitjançant divisions.

35 – 38 Equacions lineals més complicades resoltes mitjançant la regla de la falsa posició

39 - 40 Progressions aritmètiques

41 - 46 Volums

47 Taula de fraccions de 1 hekat en fraccions ull d'Horus

48 – 55 Àrees de triangles, rectangles, trapezis i cercles

56 – 60 Pendents, altures i bases de piràmides

60 – 61 Taula d'una regla per a trobar 2/3 de senars i fraccions unitàries

62 Pes de metalls preciosos

63 Repartiments proporcionals

64 Progressió aritmètica

65 Divisió proporcional de grans en grups de homes

69 – 78 Intercanvis, proporció inversa, càlculs de "pesu“

79 Progressió geomètrica

80 - 81 Taules de fraccions

82 – 84 Problemes, no clars, sobre quantitats de menjar d'ànecs, ocells i bous

85 Escriptura enigmàtica. En el papir apareix al revés

86 - 87 Memoràndum de certs contes e incidents, gran part perdut

Pràctica de problemes del Papir Rhind.

Problemes 1 a 6

Els problemes 1 a 6 es refereixen a repartiments de 1, 2, 6, 7, 8 y 9 barres de pa entre 10 homes, aplicant descomposicions en fraccions unitàries i de 2/3. En ells l'escriba dóna el resultat i es limita a comprovar que la solució és la correcta. Veiem com Ahmés comprova el resultat pel cas de n=1, el **problema 1**. Aquesta és la resolució:

Cada home rep 1/10 de pa. Multiplica 1/10 per 10, fes-ho d'aquesta manera

1----------1/10
2----------1/5
4----------1/3
8----------2/3 1/10 1/30

En efecte seguint el mètode de multiplicació fa 8 + 2 = 10 ----> 1/5 + 2/3 + 1/10 + 1/30 = 1, llavors la solució és correcta, doncs 10 * 1/10 = 1.

En aquest papir trobem nombrosos problemes sobre la divisió de pans entre homes en igual i desigual proporció. Uns altres problemes són per determinar les quantitats de grans necessàries per fer pa.

Però hi ha problemes que no es refereixen a objectes específics, com per exemple el 24 que es tracta de trobar un nombre que sumat amb la seva setena part doni 19.

L'escriba utilitza el mètode de falsa posició, o sigui prova un nombre i compara la solució amb el 19. Veient aquest tipus de problemes hom pot creure que el papir Rhind deuria ser un llibre de mà per joves estudiants.

Problema 24. Una quantitat i 1/7 de la mateixa dóna un total de 19. ¿Quina és la quantitat?

El problema es limita a resoldre l'equació x +x/7 = 19

Ahmés parteix en aquest caso d'un valor estimat de 7 i calcula 7 + 7/7 = 8. Llavors per esbrinar el valor cal trobar un número N tal que al multiplicarlo pel resultat d'aplicar el valor estimat ens doni 19, és a dir, cal dividir 19/8. El valor buscat llavors será 7*N

1 8

2 16

½ 4

¼ 2

1/8 1

16 + 2 + 1 = 19 ---> 19/8 = 2 + 1/4 + 1/8. Aquest és el valor a multiplicar per 7 per obtenir la x buscada.

1 2+1/4+1/8

2 4+1/2+1/4

4 9+1/2

Llavors el valor buscat és

2 + 1/4 + 1/8 + 4 + 1/2 + 1/4 + 9 + 1/2 = **16 + 1/2 + 1/8**

Problema 26. Una quantitat i el seu quart es converteixen en 15, i es demana calcular la quantitat.

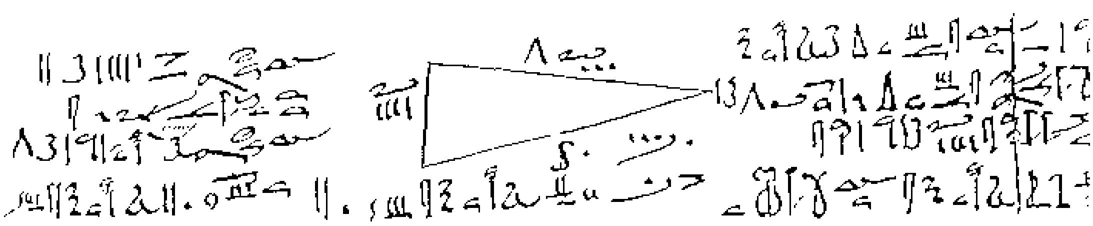
Per a nosaltres el problema es tradueix a resoldre l'equació:

$x + 1/4x = 15.$

Però on van fer les contribucions més importants el egipcis va ser en la geometria. Així els mateixos historiadors grecs: Herodotus (490-435 aC) i Proclus (410-485) citen que la geometria va néixer a Egipte amb les pujades del Nil i la necessitat de mesurar les terres quan el Nil es retirava per pagar les taxes proporcionalment al terreny que hom posseïa (corda amb 12 nusos, 3, 4 i 5).

Els egipcis eren capaços de calcular les àrees de triangles, rectangles i trapezoides de la manera usual, i també de calcular la inclinació que havia de tenir una piràmide.

Problema 51. ¿Quina és l'àrea d'un triangle de costat 10 jet i base 4 jet?



Segons està resolt el problema, sembla que el triangle és isòsceles i queda dividit en 2 parts iguals per l'altura, amb les que forma un rectangle, essent l'altura el que Ahmés anomena costat. L'escriba el resol així: “Pren la meitat de 4 per formar un rectangle. Multiplica 10 vegades 2 i el resultat, 20, és l’ àrea buscada".

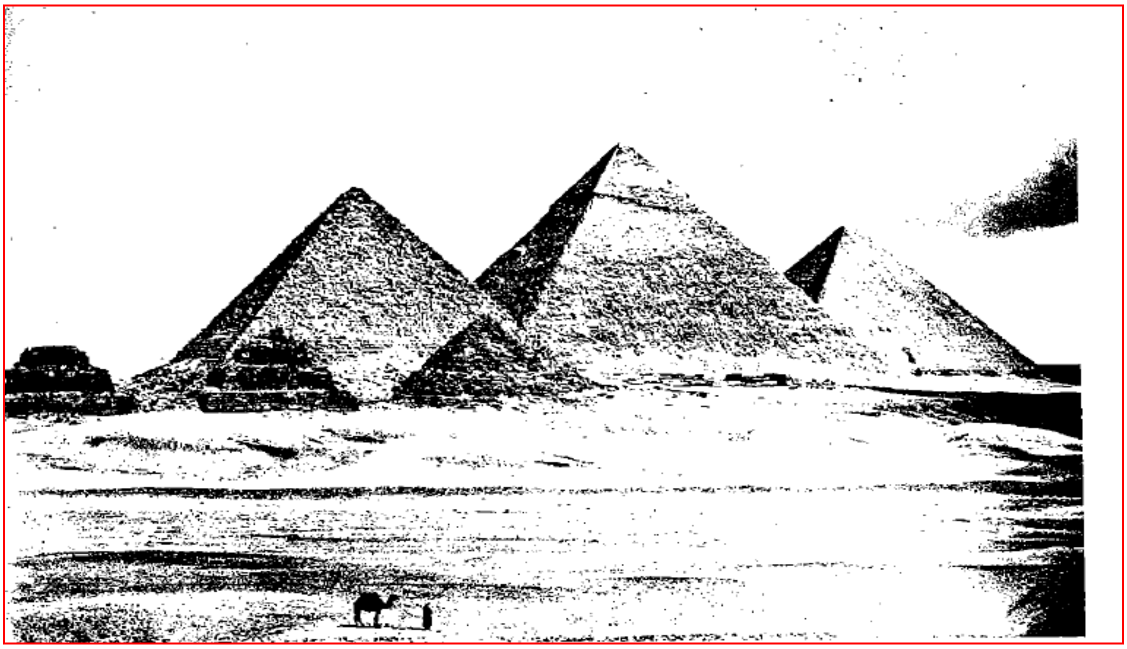


Figura 12 .Piràmides de Gizeh, prop de El Cairo. Google Imatges.

Construccions. Les piràmides. Pràctica

Les tombes reials eren primer mastabes i més tard piràmides. La Gran Piràmide del Rei Khufu conté uns 2.300.000 blocs de pedra calcària de 4 tones cadascun, estan construïdes sense ciment i en el seu interior hi ha passadissos i càmeres. Mesura 230 metres de costat la base i té una alçada de 146 metres.

El problema nº 56 del Papir Rhind busca la relació entre l'altura de la piràmide i la meitat del costat de la base, l'escriba l'anomena el "seqt" de la piràmide, nosaltres en diríem la cotangent de l'angle d'inclinació d'un costat amb la base.

En els problemes del nº 56 al nº 60 continua buscant "seqt" i, a més, emprant piràmides de costats proporcionals comprova que es conserva el "seqt".

Càlcul del *seqt* d'una piràmide

1.- Els egipcis calculaven la inclinació d'una cara d'una piràmide mitjançant la raó del "recorregut" a "l'alçada", o sigui donant el valor de l'horitzontal, des de la vertical a la cara inclinada, per cada unitat d'alçada. La unitat de les verticals és anomenada "cubit" i la unitat de l'horitzontal és una ma, on 7 mans és un "cubit". Utilitzant aquestes unitats de mesura la inclinació s'anomena "seqt" d'una piràmide. Demostra que el seqt d'una piràmide és 7 vegades la cotangent de l'angle dièdric format per la base i una cara de la piràmide.

2.- En el problema 56 del Papir Rhind es demana trobar el seqt d'una piràmide de 250 cubits d'alçada amb una base quadrada de 360 cubits de costat. La resposta és donada com 5 i 1/25 mans per cubit. És correcte? Raona la resposta.

3.- La gran piràmide de Cheops té una base quadrada de 440 cubits de costat i una alçada de 280 cubits. Quin és el seqt de la piràmide?

4.- El problema 57 del papir Rhind demana per l'alçada d'una piràmide quadrada amb un seqt de 5 mans i 1 dit per cada cubit i una base de 140 cubits de costat. Soluciona el problema sabent que 5 dits són una mà.

Algunes consideracions sobre els egipcis

Tant els egipcis com els mesopotàmics van poder ser considerats protagonistes de grans avenços del desenvolupament tecnològic.

Van erigir estructures monumentals i les seves tècniques d'enginyeria hidràulica els van permetre subsistir a la vall dels rius.

Però aquests avenços van permetre bàsicament viure millor als sacerdots i nobles i no van servir per millorar el benestar de la majoria de la població.

Tema 1. La Matemàtica a l'Antiguitat

1.3 La matemàtica grega

Els grecs habitaven des de 900 aC. les illes circumdants a l'Egeu i a la Mediterrània, així com la costa de l'Àsia Menor. També van colonitzar Sicília i la Itàlia meridional, anomenat *Magna Grècia*.

El que coneixem dels avenços de l'Antiguitat clàssica procedeix de tres fonts: els escrits, alguns textos tècnics que descriuen invents i màquines; hi ha les pròpies eines tretes pels arqueòlegs i avui són als museus i finalment, les representacions pictòriques de les parets de Pompeia o d'altres ciutats conservades, mosaics i ceràmica.

Les seves contribucions a la cultura occidental inclouen la literatura, els poemes èpics d'Homer, les tragèdies d'Esquiles, Sòfocles i Eurípides i les comèdies Aristofàniques, la primera filosofia racional, Sòcrates, Plató i Aristòtil, i la fundació de les ciències exactes: matemàtiques, astronomia i física.

Figura 13. Mapa de l'Antiga Grècia (Serres, 1991)

Els grecs van estar constantment en guerra, de fet entre els atenencs i els espartans. Cal remarcar el període hel·lenístic, quan Alexandre el Magne (357 aC. - 323 aC.) va conquerir Síria, Egipte, Palestina, Pèrsia i fins i tot a part de l'Índia. Alexandre el Gran/Magne, rei de Macedònia, va estendre el seu Imperi més allà de Persia; va fundar Alexandria.

L'Imperi d'Alexandre el Gran

Figura 14. Alexandre el Gran lluitant contra Darios III a la batalla d'Issos. Mosaic Pompeià del Museo Archeologico Nazionale, Nàpols.

Va ser el temps de més gran desenvolupament científic, època d'Euclides, Aristarc i Arquímedes, entre d'altres. Alguns autors grecs d'abans d'aquesta època van ser: Tales de Milet (ca. 625-547 aC); Pitàgores de Samos (ca. 580-500 aC); Hipòcrates de Chios (ca. 450-400 aC); Teetet d'Atenes (ca. 414-369 aC) i Eudoxos de Cnido (ca. 400-347 aC). També els dos grans filòsofs: Plató (ca. 427-348 aC) i Aristòtil (ca. 384- 322 aC).

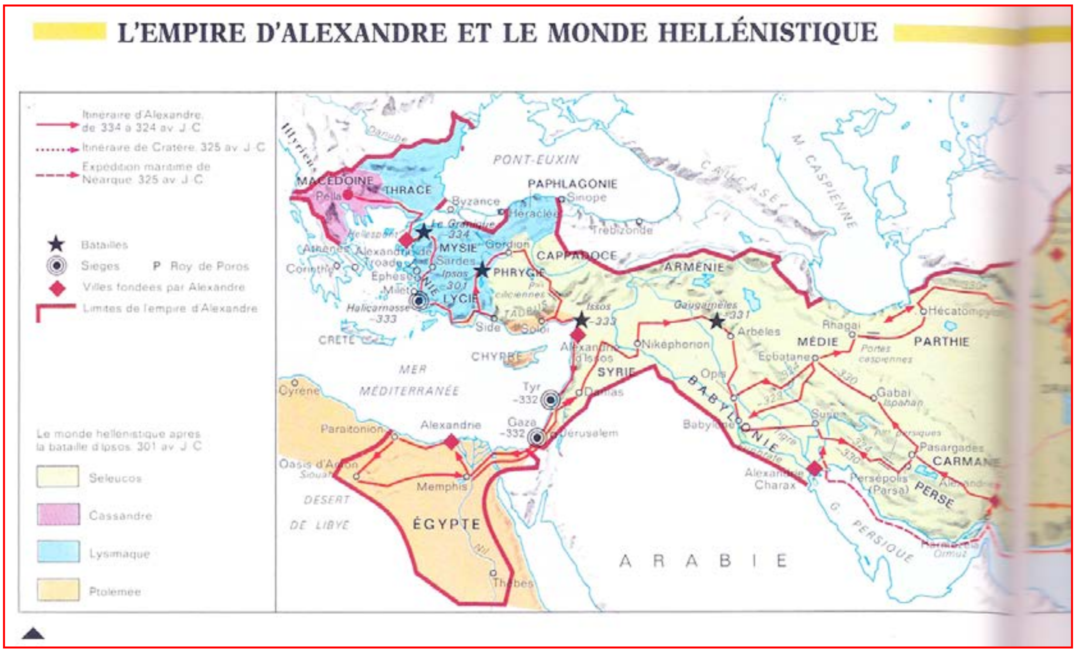


Figura 15. Les conquestes d'Alexandre el Gran. Vikipedia.

Exemple: L'escola pitagòrica

Tot el saber matemàtic de Mesopotàmia i Egipte és el que deuria conèixer Pitàgores quan va formar a Crotona la secta o escola pitagòrica que era secreta i comunal. Així tant els coneixements com les propietats eren en règim comunitari i per tant no es podia atribuir cap descobriment a cap membre concret; era molt difícil entrar-hi, es diu que es passaven proves (el primer any no es podien fer preguntes i s'escoltava darrera d'un llençol), es reunien i parlaven dels seus descobriments.

Tot és nombre, era el seu lema. Els pitagòrics feien reunions públiques, on explicaven els seus descobriments i teories. Es diu que eren vegetarians i tenien un codi de conducta molt estricte. Els pitagòrics creien que la filosofia (l'amor per la saviesa) i la matemàtica eren els pilars de la direcció de la vida. Encara que no es conserva cap font directe, aquestes informacions sobre els pitagòrics es recullen en els textos d'historiadors dels segles posteriors.

Així a l'Edat d'or de la matemàtica grega, en el segle III aC, podem situar-hi les contribucions de tres figures que tot seguit analitzarem: Euclides d'Alexandria (300 aC), Aristarc de Samos (aprox. 310-230 aC) i Arquimedes de Siracusa (287-312 aC).

a) **Euclides : Els *Elements* (aprox. 300 aC)**

L'obra d'Euclides, *Els Elements*, recull, en tretze llibres, els coneixements matemàtics de diferents escoles gregues. Aquesta obra que es creu pot ser col·lectiva és la que ha tingut més edicions després de la Bíblia, es calculen unes 1000. És el llibre que més influència cultural ha tingut al llarg de la Història. Ha estat llibre de text durant molts segles i ha influït extraordinàriament als grans autors de les revolucions científiques: Galileu, Newton, etc.

Ilustração - Página do livro d'Os Elementos in http://euler.us.es/~libros/images/euclides44.jpg

Són 13 llibres: els 6 primers de geometria plana, 3 de teoria de nombres, el nº 10 sobre els incommensurables i els 3 últims sobre geometria de sòlids.

Els quatre primers són deguts als pitagòrics, el V i el VI són deguts a Eudoxos. Els VIII-IX són també dels pitagòrics. El X és degut a Teetet. El llibre XI procedeix de l'escola Jònica. El XII té varis precursors però el mètode d'exhaustió que és el que permet demostracions rigoroses, és d'Eudoxos. Finalment, el llibre XIII és degut a Teetet.

Pel que fa al mètode dels *Elements* és axiomàtic deductiu ja que dóna primer les definicions, després els postulats, tot seguit les nocions comunes i després les proposicions (465), cadascuna amb la seva demostració. Es demostra tot a partir d'hipòtesis clares i de propietats explícitament establertes anotant en el marge les proposicions i definicions que està emprant.

Els Elements

Nocions comunes o axiomes:

1. Coses que són iguals a una mateixa cosa son també iguals

2. Si s'afegeix iguals a iguals, els tots son iguals

3. Si es treuen iguals a iguals, els restes son iguals

4. Les coses que coincideixen una amb l'altre son iguals

5. El tot es major que la part

Postulats:

1. Una línia recta pot dibuixar-se unint dos punts qualsevol.

2. Un segment es pot estendre indefinidament en una recta.

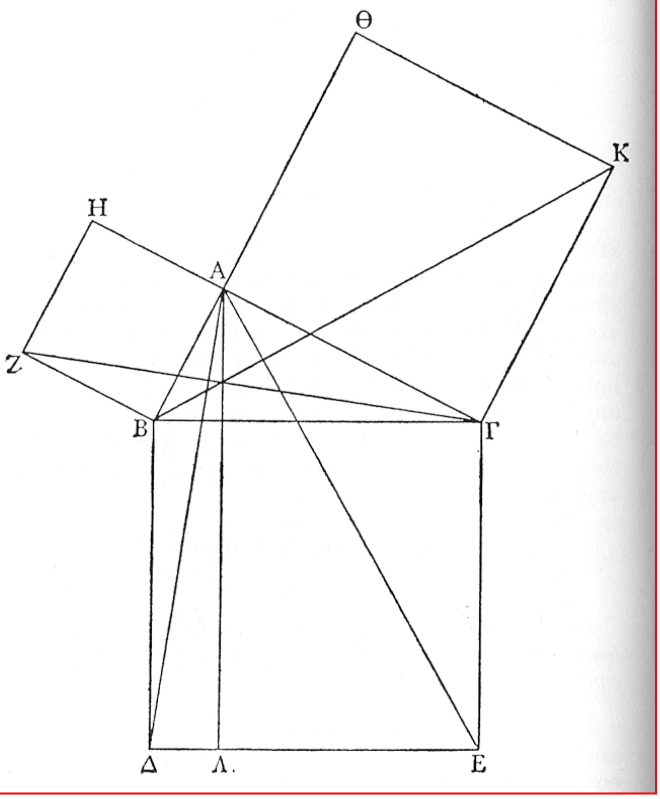
3. Donat un segment recte, pot dibuixar-se un cercle amb qualsevol centre i radi.

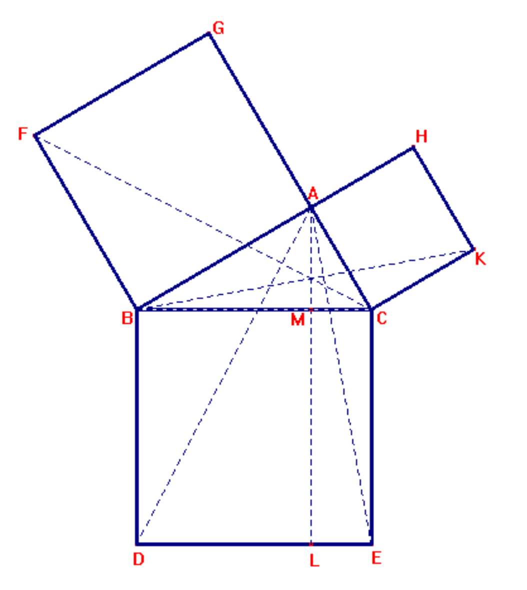
4. Tots els angles rectes son iguals entre sí.

5. Per un punt exterior a una recta, només hi pot haver una paral·lela (enunciat equivalent).

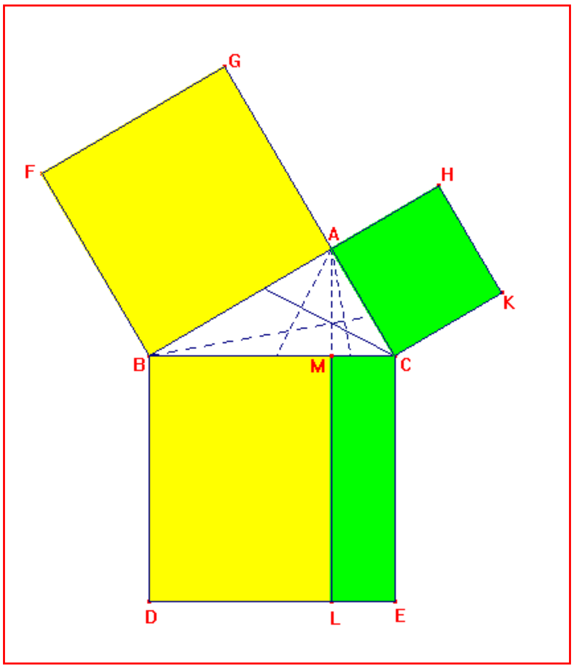
LLIBRE I. Pràctica: El teorema de Pitàgores als *Elements*

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΒΔΕΓ, ἀπὸ δὲ τῶν ΒΑ, ΑΓ τὰ ΗΒ, ΘΓ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΔ, ΓΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΛ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΖΓ. καὶ ἐπεὶ



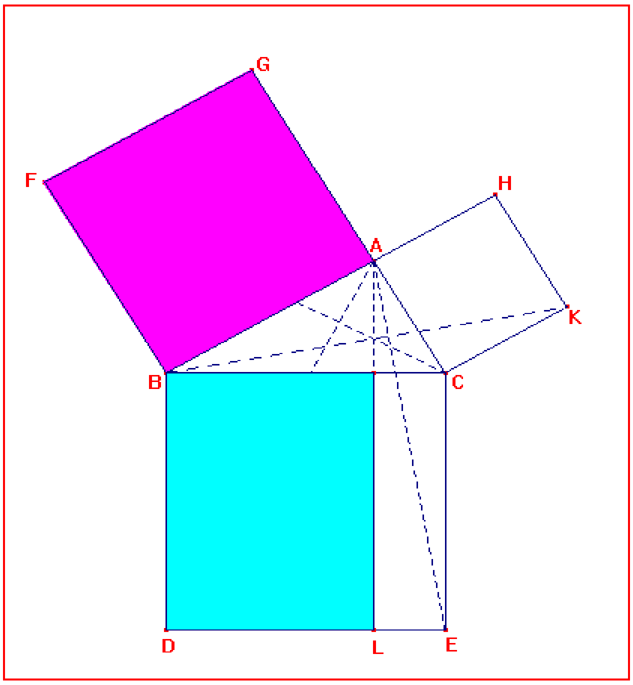


Enunciat de la Proposició (I,47): *En els triangles rectangles, el quadrat sobre el costat que correspon a l'angle recte és igual als quadrats sobre els costats que formen l'angle recte.*



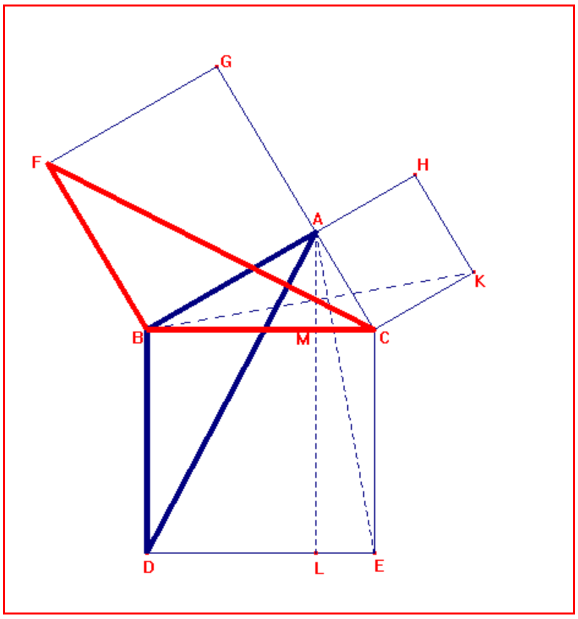
La demostració d'Euclides a l'aula. Es tracta de veure, amb tota la sèrie de dibuixos addicionals, que el quadrat BDEC està format per dos paral·lelograms BL i CL que seran iguals als quadrats respectius GB i HC. Els dibuixos estan fets a partir de l'original d'Euclides

El fil conductor de la demostració: **El** paral·lelogram BL i el quadrat GB són iguals.



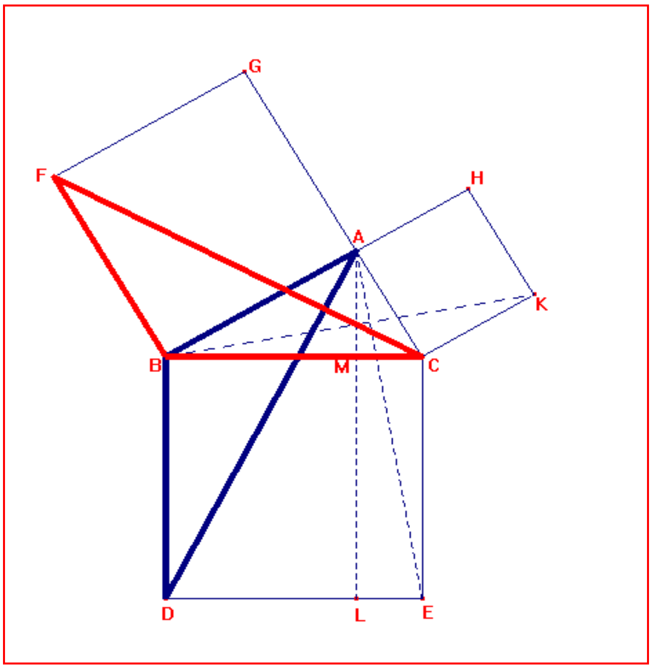
a) Els triangles ABD i FBC són iguals; b) El paral·lelogram BL és el doble del triangle ABD; c) El quadrat GB és el doble del triangle FBC; d) El paral·lelogram BL i el quadrat GB són iguals.

a) **Els triangles ABD i FBC són iguals**



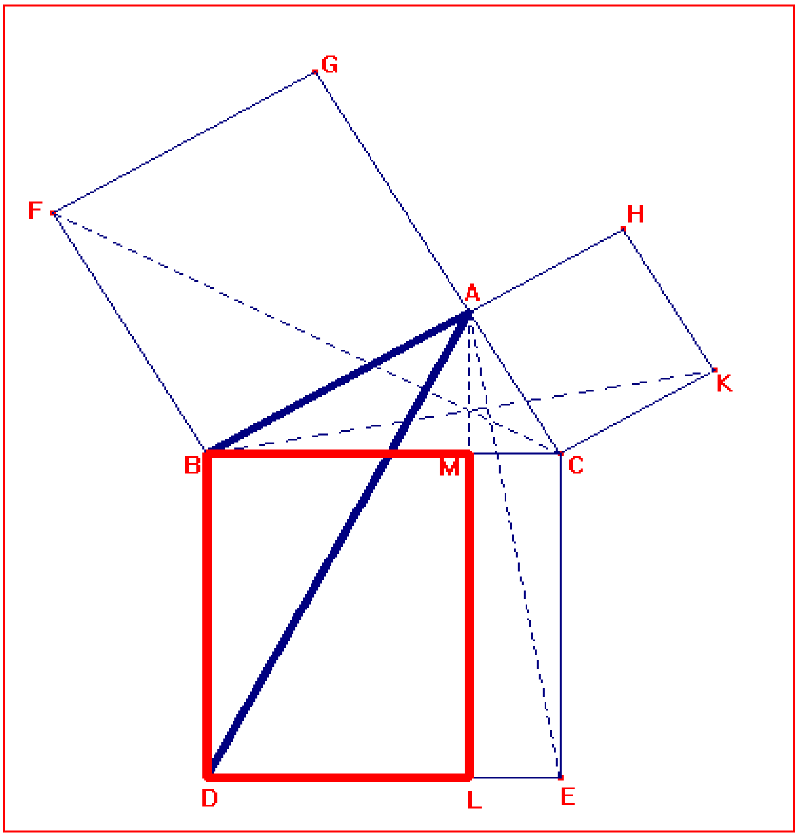
Dos costats iguals: FB = BA, BC = BD. L'angle comprès entre els dos costats iguals FBC = ABD és un recte més l'angle ABC per als dos triangles.

Heu de veure que els dos triangles tenen dos costats iguals i l'angle comprès entre els dos costats també igual.



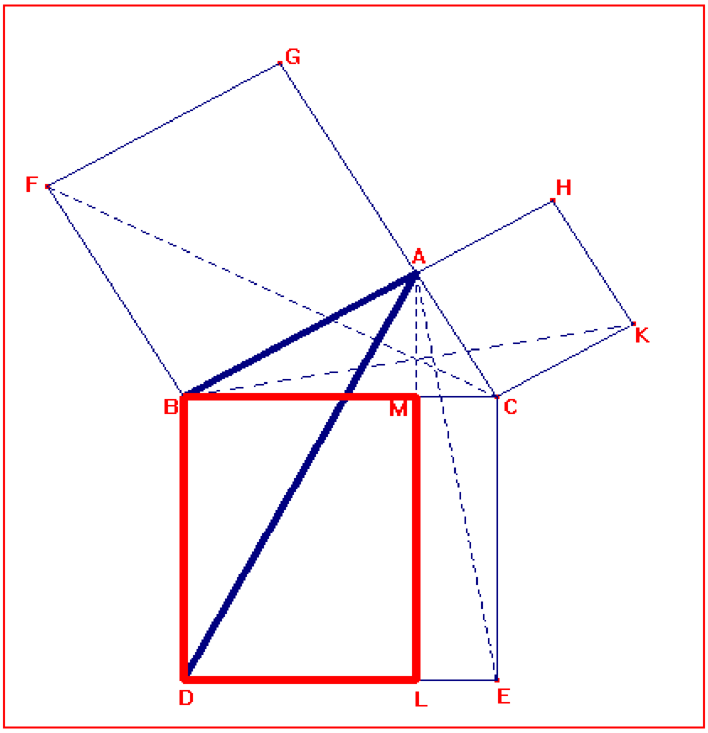
Localitzeu els costats que són iguals dos a dos i resseguiu-los amb el mateix color. Pinteu els dos triangles amb tramats diferents. Desmunteu els triangles aquí sota per veure'ls millor per separat i amb la mateix orientació que en el dibuix de dalt. En aquests triangles torneu a pintar del mateix color els costats iguals. Descomponeu l'angle entre els dos costats iguals en un recte i l'angle igual.

b) El paral·lelogram BL és el doble del triangle ABD



La base BD és comú a les dues figures i també ho és l'altura BM perquè les dues figures estan compreses entre les mateixes paral·leles, BD i AL. De la mateixa manera es demostra que el quadrat GB és el doble del triangle FBC.

c) El paral·lelogram BL és el doble del triangle ABD



El rectangle i el triangle tenen la mateixa base:

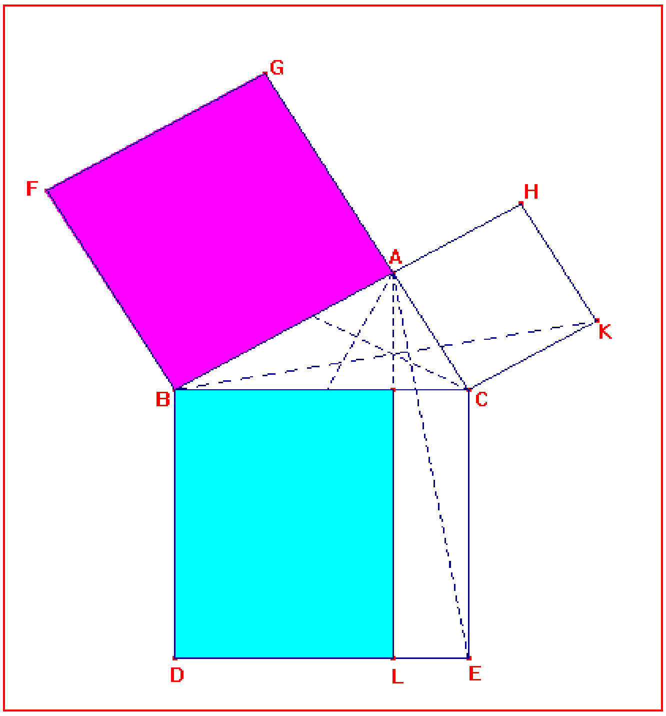
Encareu-vos el dibuix de manera que la base sigui la mateixa per a les dues figures. Escriviu la paraula "base" en el costat que correspongui.

El rectangle i el triangle tenen la mateixa altura:

Localitzeu l'altura del rectangle i del triangle, escriviu la paraula "altura" al costat. Com són l'altura del rectangle i del triangle?

Conclusió: Quina relació hi ha entre el triangle i el rectangle?

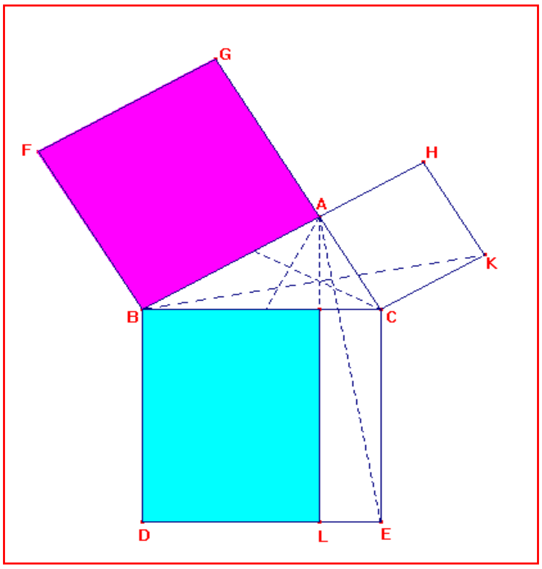
d) **El paral·lelogram BL i el quadrat GB són iguals**



Perquè ho són els triangles respectius amb els que se'ls ha comparat.

De la mateixa manera es demostra que el paral·lelogram CL és igual al quadrat HC.

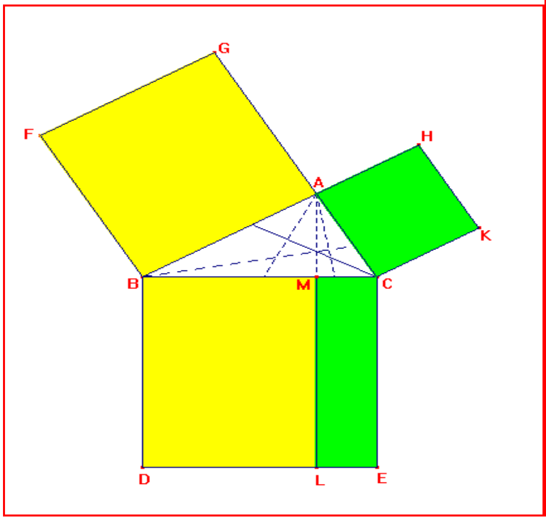
c) **El paral·lelogram BL i el quadrat GB són iguals**

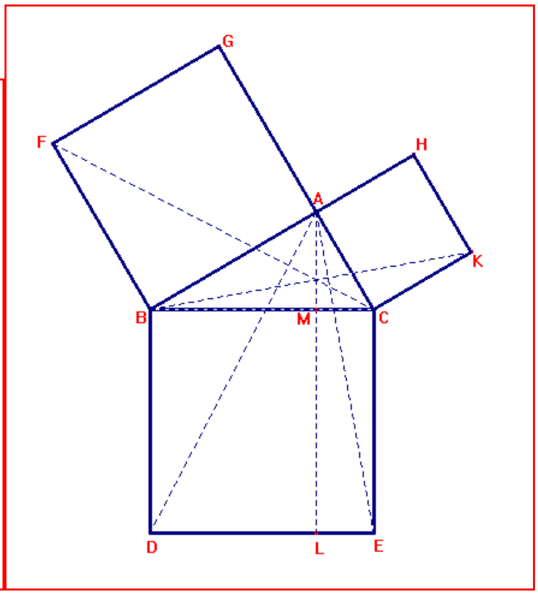


Amb tot el que heu fet fins ara, quin és el raonament que us permet dir que el quadrat GB és igual al paral·lelogram BL?

Expliqueu aquest raonament

L'altra banda de la demostració i el final





Cal seguir els passos equivalents per veure que el paral·lelogram CL és com el quadrat HC. Heu de trobar en el dibuix els dos triangles que seran iguals i que us han de servir per a comparar després el paral·lelogram CL amb el quadrat HC.

LLIBRE II. Pràctica

Aquí podem veure algunes proposicions geomètriques que alguns autors des de l'època dels àrabs al Renaixement han utilitzat posteriorment per interpretar geomètricament la resolució de l'equació de segon grau.

PROPOSITION 6.

If a straight line be bisected and a straight line be added to it in a straight line, the rectangle contained by the whole with the added straight line and the added straight line together with the square on the half is equal to the square on the straight line made up of the half and the added straight line.

For let a straight line *AB* be bisected at the point *C*, and let a straight line *BD* be added to it in a straight line;

I say that the rectangle contained by *AD*, *DB* together with the square on *CB* is equal to the square on *CD*.

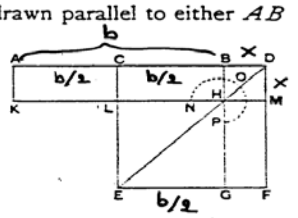
For let the square *CEFD* be described on *CD*, [I. 46] and let *DE* be joined;

through the point *B* let *BG* be drawn parallel to either *EC* or *DF*,

386 BOOK II [II. 6

through the point *H* let *KM* be drawn parallel to either *AB* or *EF*,

and further through *A* let *AK* be drawn parallel to either *CL* or *DM*. [I. 31]



Then, since *AC* is equal to *CB*,

AL is also equal to *CH*. [I. 36]

But *CH* is equal to *HF*. [I. 43]

Therefore *AL* is also equal to *HF*.

$$x\cdot(x+b)+\left(\frac{b}{2}\right)^2=(x+$$

Let *CM* be added to each;

therefore the whole *AM* is equal to the gnomon *NOP*.

But *AM* is the rectangle *AD*, *DB*,

for *DM* is equal to *DB*;

therefore the gnomon *NOP* is also equal to the rectangle *AD*, *DB*.

Let *LG*, which is equal to the square on *BC*, be added to each;

therefore the rectangle contained by *AD*, *DB* together with the square on *CB* is equal to the gnomon *NOP* and *LG*.

But the gnomon *NOP* and *LG* are the whole square *CEFD*, which is described on *CD*;

therefore the rectangle contained by *AD*, *DB* together with the square on *CB* is equal to the square on *CD*.

Therefore etc.

Q. E. D.

Llibre II. Proposició 6. "Si es divideix en dues parts iguals una línia recta [$b/2$] i se li afegeix, en línia recta, una altra recta [x]; el rectangle comprés per la recta sencera amb la recta afegida i la recta afegida

$[(x+b).x]$ juntament amb el quadrat sobre la meitat $[(b/2)^2]$ és igual al quadrat sobre la recta composta per la meitat i la recta afegida $[(x+b/2)^2]$."

$[(x+b).x] + [(b/2)^2] = [(x+b/2)^2]$

$[(x+b).x] = \mathrm{c}$

$\mathrm{c} + [(b/2)^2] = [(x+b/2)^2]$

$[\mathrm{c} + [(b/2)^2]]^{1/2} = (x + b/2)$

Més endavant, a la Proposició 11 d'aquest mateix llibre, Euclides utilitza aquesta igualtat per demostrar com trobar un rectangle igual a un quadrat $[(x+b).x = c]$. La construcció geomètrica que acompanya aquestes proposicions és un quadrat de costat "x" completat amb dos rectangles de costats "x" i "$b/2$" i un quadrat de costat "$b/2$" per obtenir un quadrat de costat "$(x + b/2)$".

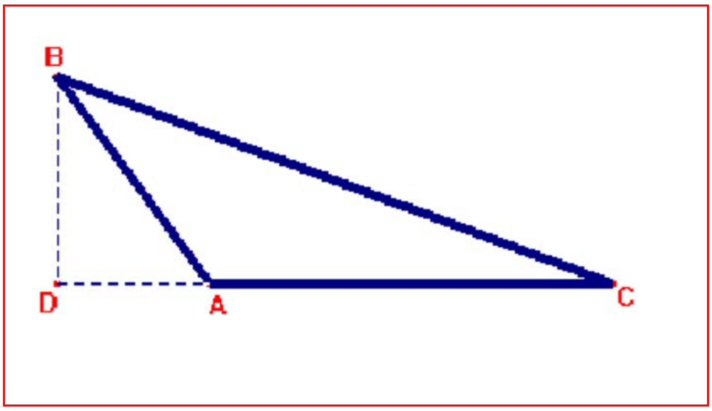
Cal remarcar que en el text d'Euclides no hi ha símbols, ni nombres, ni expressions algebraiques, només figures i relacions entre els costats i les àrees, és a dir, només hi ha geometria: segments que s'afegeixen i que quan es multipliquen donen àrees de figures geomètriques.

Pràctica. Geometria *Els Elements*.

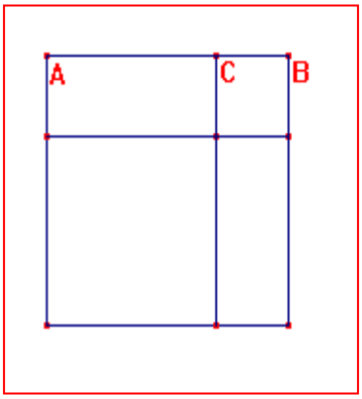
Enunciat de la proposició (II,12): "En els triangles obtusangles, el quadrat sobre el costat oposat a l'angle obtús (CB) és més gran que els quadrats sobre els costats que formen l'angle obtús (AB i AC) en dues vegades el rectangle comprès per un costat dels de l'angle obtús (AC) sobre el que cau la perpendicular i la recta exterior tallada per la perpendicular, fins l'angle obtús (DA)."

L'expressió algebraica en llenguatge actual:

$$CB^2 = AB^2 + AC^2 + 2DA \cdot AC$$



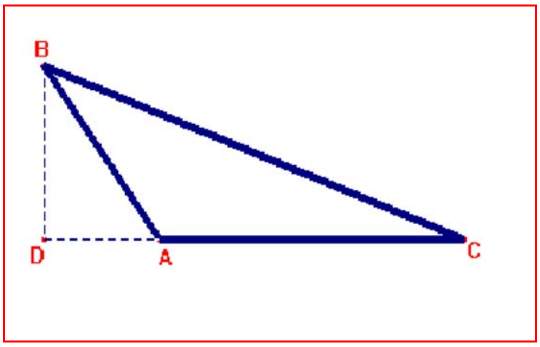
Per fer la demostració, Euclides es basa en les proposicions (II,4) i (I,47).



(II,4) $\rightarrow$ "Si es talla a l'atzar una línia recta (AB), el quadrat sobre la recta sencera és igual als quadrats sobre els segments i dues vegades el rectangle comprès entre els segments."

L'expressió algebraica seria:

$$(AC+CB)^2=AC^2+CB^2+2\cdot AC\cdot CB$$



Euclides aplica la proposició (II,4) anterior, que vosaltres coneixeu com el desenvolupament del quadrat d'un binomi, al segment DC, que el considera dividit a l'atzar pel punt A en els segments DA i AC.

Escriviu en llenguatge algebraic el resultat d'aplicar la proposició (II,4) al segment DC:

$$DC^2=DA^2+AC^2+2DA\cdot AC$$

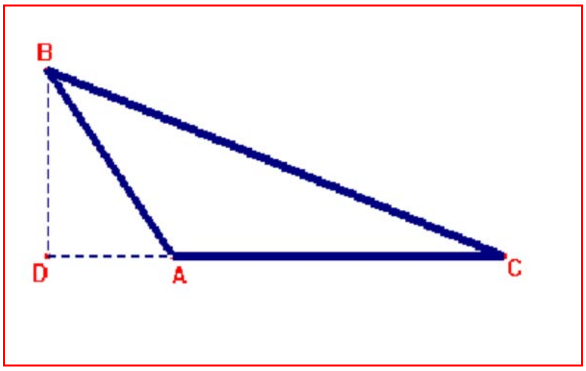
Torneu a escriure la igualtat afegint-hi als dos membres el quadrat de DB:

$$DC^2+DB^2=DA^2+DB^2+AC^2+2DA\cdot AC$$

L'altra proposició que utilitza Euclides per a demostrar la (II,12) és la (I,47), que vosaltres coneixeu com "teorema de Pitàgores". Es pot aplicar aquesta proposició als triangles BDA i BDC? Per què?

Si els hi apliquem, en què es converteix el primer membre de la igualtat que acabeu d'escriure? En CB^2

I els dos primers termes del segon membre, en què es converteixen? En AB^2



Torneu a escriure la igualtat fent aquestes substitucions i obtindreu la proposició (II,12) dels *Elements* d'Euclides, escrita en llenguatge algebraic.

$$CB^2 = AB^2 + AC^2 + 2DA \cdot AC$$

Totes les figures es troben a les nostres publicacions sobre història de la matemàtica i ensenyament.

b) Aristarc de Samos (aprox. 310-230 aC). La mesura de l'univers.

Aristarc de Samos va escriure 270 aC una obra d'astronomia emprant geometria. Hem de entendre per astronomia la ciència que estudia els moviments (aparents) dels astres visibles, o sigui el Sol, la Lluna, les estreles, els planetes i tots els objectes que s'observen en el cel. Encara que els poetes grecs Homer i Hesíode[1] empraven les recurrències celestials per a la regulació de la vida diària, segons Heath, el veritable astrònom era el que analitzava els moviments del Sol, la Lluna i els cinc petits planetes combinats amb el moviment de l'esfera de les estreles fixes [Heath, 1981a, p.12]. L'astronomia, en els seus començaments, era totalment descriptiva i les teories servien per explicar les aparences celestes. Les matemàtiques i, en concret la geometria, van ser una de les eines que van facilitar aquesta descripció.

Com molts historiadors assenyalen, la història de l'astronomia grega probablement va començar com a part de la història de la filosofia grega, de manera que els primers grans filòsofs van ser també a la vegada els primers astrònoms. Així podem citar, per exemple, Tales (aprox. 624-547 a.C.), Pitàgores (aprox. 572-497 a.C.), Eudoxos (aprox. 408-355 a.C.) i Aristòtil (aprox. 384-322 a.C.).[2]

---

[1] Per exemple, Hesíode, un dels primers poetes grecs, va escriure al voltant de 700 a.C. una épica titolada: *Los Trabajos y los días*. En ella es descriuen els treballs del camp segons la posició de les constelacions en el cel.

[2] En la introducció de Heath apareixen també Anaximandre de Mileto (aprox. VI a.C.), Anaxímenes (aprox. VI a.C.), Xenófanes (aprox, V a.C.), Heráclit (aprox. VI a.C.), Heráclides de Ponto (aprox. IV a.C.) i Plató (aprox. IV a.C.) [Heath, 1981, pp. 1-297].

Tales, conegut com astrònom i que, segons Heath, va predir i explicar les causes d'un eclipsi[3]de Sol, entenia la Lluna i el Sol com discos o cilindres curts que es comportaven com si flotessin a l'aigua [Heath, 1981b, 137-138]. Tannery compara aquesta visió de l'univers de Tales amb la que es trobava als papirs egipcis [Tannery, 1990, 74].

Figura 16. Interpretació de Tales. Google Imatges.

Altres interpretacions van procedir de Pitàgores i els seus seguidors, que van reconèixer que la Terra era una esfera i que Venus, l'estel vespertí, era el mateix planeta que Venus, l'estel matutí. El moviment de la Terra així com el del Sol, la Lluna i els planetes al voltant d'un foc central va ser també una teoria atribuïda a un deixeble de Pitàgores, Filolao de Crotona (aprox. 470 aC.) [Berry, 1961, pp. 24-25].

[3]Recentment Bowen y Goldstein (1994) han publicat un article amb comentaris astronómics sobre els eclipsis solars a Aristarc, Tales i Heraclit.

Figura 17. Interpretació dels pitagòrics. Google Imatges.

Posteriorment, Eudoxos va proposar una teoria d'esferes homocèntriques per descriure el moviment dels cossos celestes. Va suposar que la Terra romania immòbil en el centre i que els planetes (incloent-hi el Sol i la Lluna) descrivien moviments circulars al voltant d'ella. Eudoxos va considerar les esferes encaixades i concèntriques amb la Terra: tres esferes pel Sol, tres per la Lluna i quatre per cadascun dels altres planetes amb diferents velocitats de rotació i eix de gir. Va construir també un observatori a Cnido, va observar les estrelles i va escriure un llibre sobre la sortida i la posta de les constel·lacions.

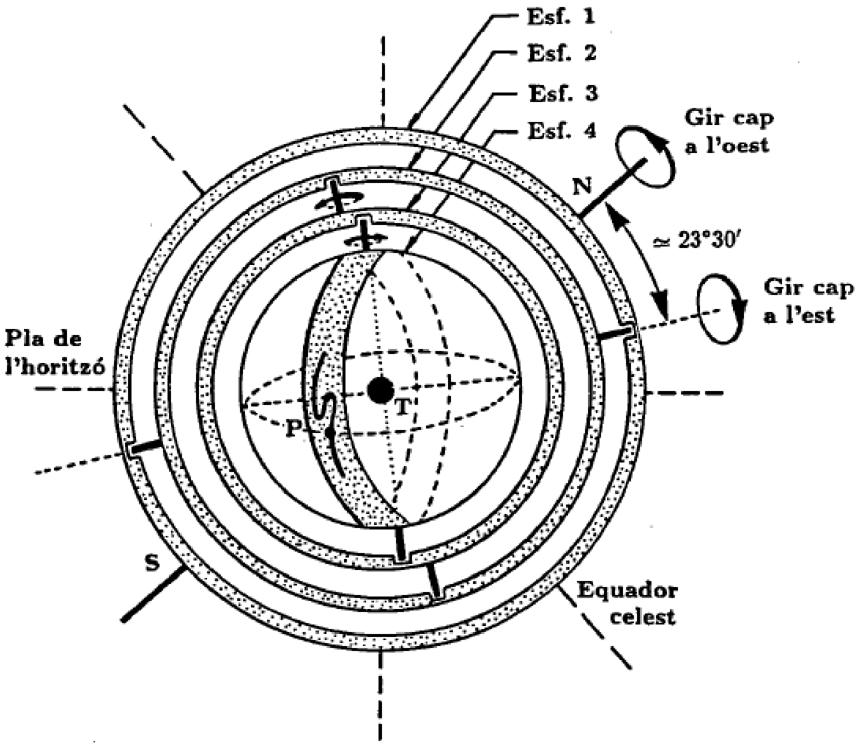


Figura 18. Interpretació d'Eudoxos. Google imatges.

Aristòtil, que va tenir una gran influència amb els seus textos, va analitzar les realitats observables i va reconstruir la teoria de l' univers integrant a la seva cosmologia moltes de les idees dels seus predecessors tals com el geocentrisme, el marc estructural de les dues esferes, el principi platònic de moviment circular i uniforme els cossos celestes, i a més, es va apropiar de la teoria presocràtica dels quatre elements. Va establir les bases del que avui anomenem *física antigua* i les línies bàsiques de la seva doctrina varen ser acceptades com a dogma durant unes seixanta generacions. Les fonts disponibles que fan referència als principis de filosofia natural d'Aristòtil són els vuit llibres de *Física*. Les qüestions astronòmiques es discuteixen sobretot en els quatre llibres del *De Caelo* i en la

Meteorología. De fet la pràctica totalitat dels astrònoms grecs, àrabs i cristians van acceptar, de forma implícita o no, les premisses fonamentals de la cosmologia aristotèlica: el caràcter tancat i finit del cosmos, la immobilitat de la Terra en el centre de l'univers i la diferència entre les dues regions: la celeste (supralunar) i la terrestre (sublunar).

Aristarc de Samos (aprox. 310-230 aC.). Dades biogràfiques[4]

Aristarc de Samos, que es situa entre Euclides (aprox. 300 aC) i Arquimedes (287-212 aC), a la seva obra *Sobre les mides i les distàncies del Sol i la Lluna* va utilitzar la teoria geocèntrica. Aristarc fou un dels pioners en escriure una obra que calculava les mides del Sol y la Lluna relacionant-les amb els de la Terra i les distàncies d'ells a la Terra.

Aristarc, que va néixer aproximadament el 310 aC. a l'illa de Samos, va ser deixeble d' Estrató de Lampsaco, tercer director del Liceu, l'escola fundada per Aristòtil, director del Museu d'Alexandria l'any 287 aC.. No es coneix gaire bé res de la seva vida però hi ha fonts sobre les seves observacions astronòmiques al Museu d'Alexandria amb Timocaris d'Alexandria (aprox. III aC.) i Aristil(deixeble de Timocaris). Les poques informacions de què es disposen venen determinades per les cites trobades en textos posteriors i per l'obra que ens va deixar. Així, Ptolemeu (aprox. 85 -165), a la seva obra

[4]Apart de les biografíes clàssiques, Wall (1975) ha publicat un article sobre la historiografía d'Aristarc de Samos.

Almagest (150), anomenada també *Sintaxis Matemática,* explica que Aristarc va observar el solstici d'estiu a l'any 280 aC. Ptolemeu, a l' apartat primer del llibre III de la seva obra, descriu també els procediments d'Aristarc per a determinar la longitud de l'any solar [Ptolemy, 1984, pp. 137-139]. Posteriorment, Nicolau Copérnic (1473-1543) a la seva obra *De Revolutionibus orbium coelestium libri VI* (1543) explica les observacions realitzades per Aristarc a Alexandria amb Timocaris d'Alexandría (aprox. III a.C.) i Aristil. En el capítol II del tercer llibre, Copèrnic relata les observacions dels equinoccis i solsticis amb el títol: "Història de les observacions que comproven l'irregular precessió dels equinoccis i els solsticis" i cita a Aristarc i a Timocaris. Conclou que "des de Timocaris a Ptolemeu, en comparació amb els altres temps, el moviment aparent de precessió dels equinoccis es va descobrir més lent." [Copérnico, 1987, pp. 151-154,162-169 i 183-187].

Encara que va ser reconegut com astrònom, Aristarc a la seva època va ser anomenat el "matemàtic" i citat com un dels pocs homes que tenien un profund coneixement de totes les branques de la ciència: geometria, astronomia i música. Així Vitruvi (s. I a.C.) el menciona en la seva obra *De Architectura* (35-25 a.C.):

> "Els que van rebre de la naturalesa tant talent, perspicàcia i memòria, que poden adquirir perfectament la Geometria, l'Astrologia, la Música, i d'altres disciplines, passen els límits d'arquitectes i es fan Matemàtics; amb els quals poden fàcilment gaudir d'aquestes ciències, participant així del coneixement de moltes altres. Però rares vegades es veuen tals

> subjectes, com en altres temps ho van ser **Aristarc de Samos, Philolao i Architas de Tarento, Apol·loni de Perga, Eratóstenes de Cyrene, i Arquimedes i Scopínas de Siracusa**: els quals van deixar a la posteritat moltes invencions orgàniques i gnomòniques, trobades i explicades per càlcul numèric, i raons naturals."

Segons Tannery (1995, Vol. I, p. 373), Vitruvi explica també que Aristarc havia construït dos rellotges de Sol, un d'hemisfèric i un d'altre pla.

Aristarc, antic Copèrnic?

Aristarc és sobretot conegut per ser l'"antic Copèrnic". Hi ha unanimitat en afirmar que Aristarc fou dels primers en presentar la hipòtesisheliocèntrica. En un text d'Arquimedes, *Arenario* (216 a.C.), es dedueix que Aristarc suposava que les esferes de les estreles y el Sol romanien a l'espai sense moure's i que la Terra girava al voltant del Sol. Aristarc comparava l'esfera de les estreles fixes amb l'orbita de la Terra (Archimède, 1971, p. 135),

> "... Aristarc de Samos ha publicat algunes hipòtesis[5]de les quals es dedueixen pel món dimensions molt més grans que les que acabem de mencionar. Efectivament, **suposa que les estrelles fixes i el Sol resten immòbils, que la Terra gira al voltant del Sol sobre una circumferència de cercle,** ocupant el

[5]Es creu que és una obra perduda titoladaa*Las Hipótesis* de 260 a.C..

> Sol el centre d'aquesta trajectòria, i que l'esfera de les fixes, que s'estén al voltant del mateix centre que el Sol, té una mida tal que la raó del cercle sobre el que se suposa que la Terra gira, respecte a la distància de les estrelles fixes és comparable a la raó del centre de l'esfera respecte a la seva superfície."

En aquest sentit també el cita Plutarc (aprox. 46-125)[6] en la seva obra *Obras Morales*. Plutarc comenta que Cleanthes creia que s'hauria d'atacar a Aristarc per desplaçar la Terra del centre de l'univers o sigui que, en aquella època, se suposava que Aristarc assumia, en les seves teories, el moviment de la Terra.

> ..."Oh Senyor, senzillament no ens acuseu d'impietat com Cleanthes[7]que va creure que els grecs haurien d'haver presentat una acció per impietat contra Aristarc de Samos, sobre la base que estava desplaçant la Terra de l'univers, perquè va intentar explicar[8]els fenòmens suposant que els cels estan quiets mentre que la Terra gira al llarg de l'eclíptica i al mateix temps està girant sobre el seu propi eix."[9]

Tanmateix, malgrat aquestes referències, Aristarc a la seva obra *Sobre les mides i les distàncies del Sol i la Lluna* no presenta la hipòtesis heliocèntrica. Es probable que aquesta hipòtesis se li sugerís en

[6]Plutarc fou un historiador grec. Deu la seva fama a la seva obra *Vidas paralelas*, en ella estableix comparacions entre figures greges i romanes i és una font molt important d'informació sobre l'Antiguitat. Els altres escrits: *Obras Morales* són 78 tractats que recullen discussions filosofiques i de carácter retòric.
[7] Cleanthes (263-232 a.C.) filosof estoic, deixeble de Zenó.
[8] Literalmente seria "salvar els fenomens". La idea és adaptar les teories establertes i acceptades per a que puguin anar explicant els fenomens nous a mesura que es van produint.
[9] Plutarc va escriure aquestes idees sobre Aristarc en un tractat de les seves *Obras Morales* titolat: *Sobre la cara visible de la Luna*, es sol citar *Moralia* 923 A [Chermiss- Helmbald, 1957, p. 55].

comprovar, en la seva obra, que el Sol és molt més gran que la Terra i la Lluna i es troba molt més lluny de la Terra que la Lluna.

L'obra: Sobre les mides i les distàncies del Sol i la Lluna

Pappus en el llibre VI de la seva obra *Col·lecció Matemàtica* (aprox. 340) explica que es trobava en un recull anomenat *Petita Astronomia:*

Optica i *Fenòmens* (Euclides); *Esfèriques* (Teodosi) ; *Sobre l'esfera en moviment* (Autolico de Pitania) i d'altres.

Les traduccions i edicions són diverses al llarg del temps:

Ca. 912 Luqa al-Balabakki traducció del grec a l'àrab; Nasir Al-din Al- Tusi (1201-1274) va fer una recensió de tots els llibres de *Petita Astronomia*; 1448 George Valla traducció llatina; 1572 Federico Commandino traducció llatina; 1688 John Wallis (edició grega); 1810-1823 Fortia d'Urban, edició greco-llatina i traducció francesa; 1913 Heath traducció anglesa a partir d'un manuscrit grec del Vaticà, del text de Wallis i de la traducció francesa de Fortia d'Urban i l'any 2007 Mª Rosa Massa traducció espanyola a partir de la traducció llatina de Commandino i la traducció anglesa de Heath (Fig. 19).

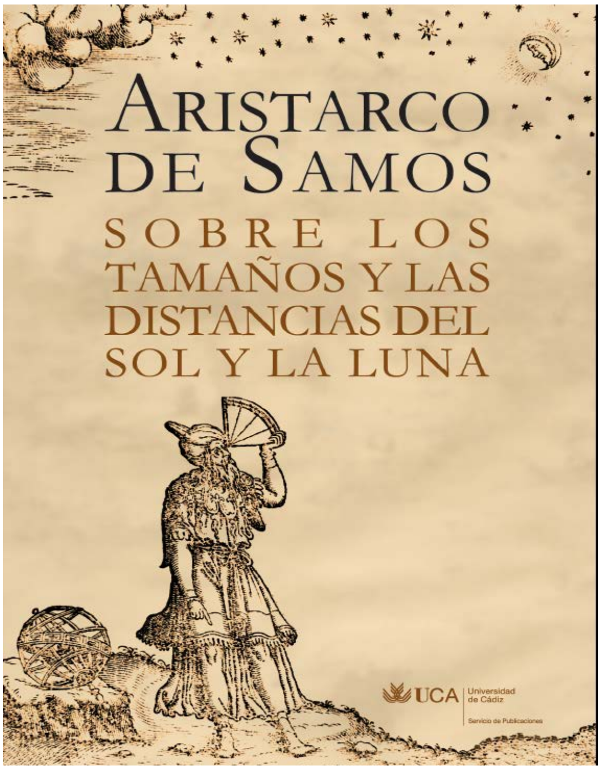


Figura 19. Portada del llibre (Aristarco, 2007)

Respecte al llibre: És un llibre de ciència antiga. És una traducció científica. És un text d'aproximadament 230 aC. i és la primera traducció espanyola d'aquest text clàssic. És una de les poques obres clàssiques que ens ha arribat a nosaltres amb totes les proposicions, il·lustracions i demostracions. **Contingut del llibre:** Pròleg. Introducció i Bibliografia. Traducció castellana amb notes de l'obra d'Aristarc. Traducció castellana de la *Col·lecció Matemàtica* (aprox. 340 aC.) de Pappus, fragment sobre l'obra d'Aristarc de Samos. Text llatí facsímil de Federico Commandino (1572).

ARISTARCHI
DE MAGNITVDINIBVS,
ET DISTANTIIS SOLIS,
ET LVNAE, LIBER
CVM PAPPI ALEXANDRINI
explicationibus quibuſdam.
A FEDERICO COMMANDINO
Vrbinate in latinum conuerſus, ac
commentarijs illuſtratus.
Cum Priuilegio Pont. Max. In annos X.

PISAVRI, Apud Camillum Franciſchinum.
M D LXXII.

Figura 20. Portada del facsímil de la traducció de Commandino que conté el llibre

Contingut: Sobre les mides i les distàncies del Sol i la Lluna

6 Hipòtesis

1.- La Lluna rep la llum del Sol.

2. - Que la Terra és com un punt al centre de l'esfera en la qual es mou la Lluna.

3.- Que, quan la Lluna se'ns mostra partida en dues parts, el gran cercle que separa la foscor i la claror de la Lluna s'inclina cap a la nostra visió.

4.- Que, quan la Lluna se'ns mostra partida per la meitat, llavors la mateixa Lluna s'allunya del Sol menys d'una quarta part (90º) en 1/30 part d'un quadrant (o sigui en 3º).

5.- Que, l'amplada de l'ombra de la Terra es suposa com dues Llunes.

6. - Que la Lluna subtendeix una quinzena part d'un signe del zodíac (o sigui 1/15 part de 30º) .

Hipòtesis d'Aristarc

Les hipòtesis de les quals parteix es poden agrupar en dos blocs: un, per a les tres primeres que són descriptives i altre, per a les tres restants que són a més quantitatives.

El contingut de les tres primeres podríem enunciar-lo així: la primera afirma que La Lluna rep la seva llum del Sol, la segona explica que La Terra representa el centre de l'esfera en la qual es mou la Lluna, i la tercera ens descriu que el cercle màxim que delimita les parts de foscor i claredat en la Lluna està en el camp de visió del nostre ull. Aquestes hipòtesis, doncs, no aporten cap angle, cap mesura, sinó que descriuen les posicions dels astres.

Les altres tres hipòtesis proporcionen mesures obtingudes probablement per observació. Així, la quarta implica que quan la Lluna forma angle recte amb el Sol i la Terra, l'angle de visió de la Lluna des de la Terra és de 87º, ja que l'altre angle del triangle rectangle amida una trentena part (1/30) d'un quadrant (90º), és a dir 3º; la cinquena ens proporciona la grandària de l'ombra de la Terra que és dues vegades la Lluna, i la sisena i última ens explica que la Lluna és vista des de la Terra, formant un con, amb un angle de 2º, que és una quinzena part d'un signe del zodíac (30º).

Tres Tesis

A través de divuit proposicions demostra tres tesis:

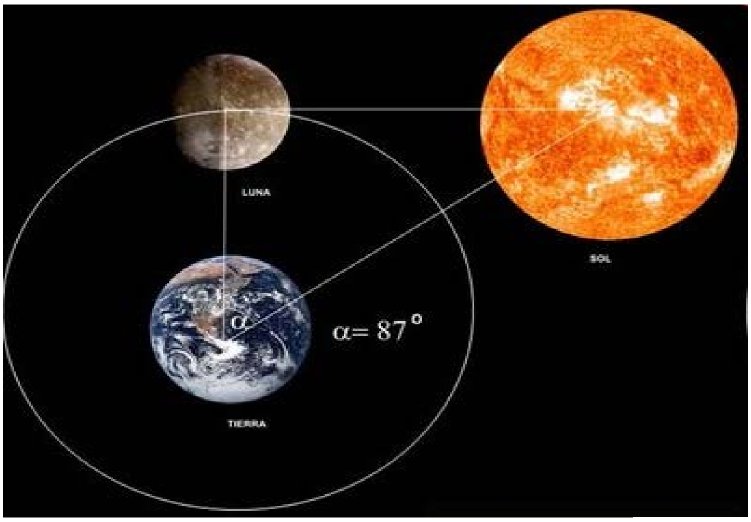
1. La distància al Sol des de la Terra és més gran que 18 vegades, però més petita que 20 vegades, la distància a la Lluna des de la Terra (Proposició 7).

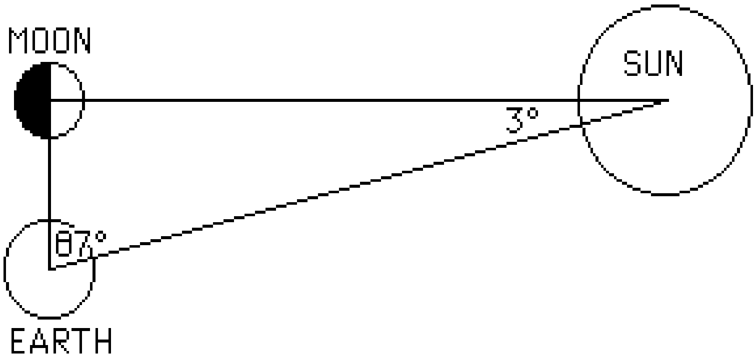
2. El diàmetre del Sol està en la mateixa raó que el diàmetre de la Lluna (Proposició 9).

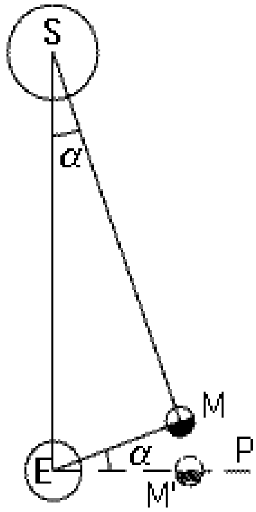
3. El diàmetre del Sol té respecte al diàmetre de la Terra una raó més gran que la de 19 a 3 però més petita que la de 43 a 6 (Proposició 15).

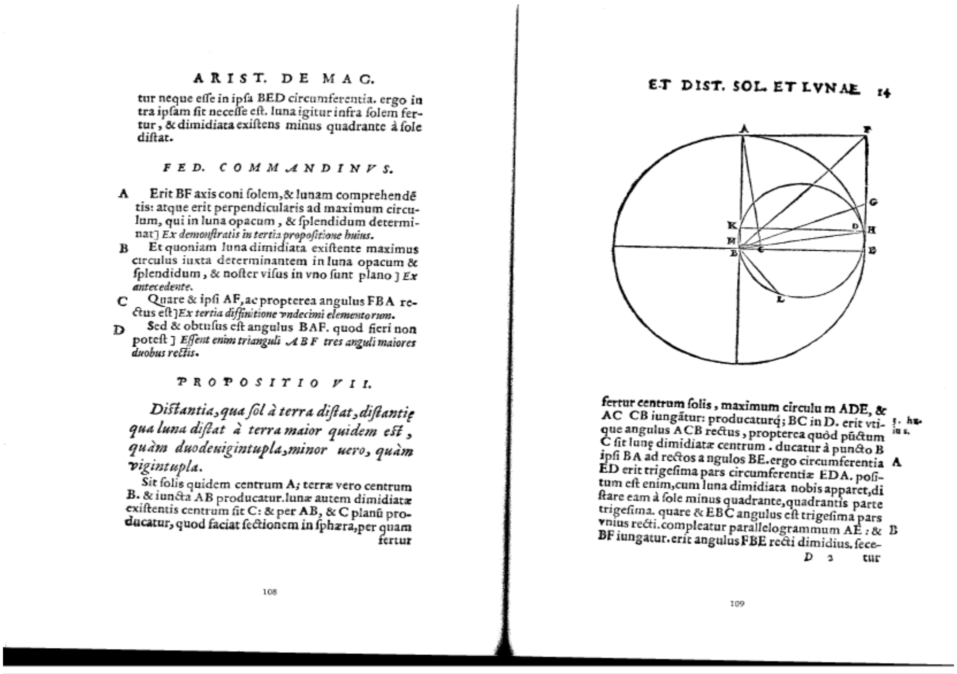
Pràctica. Proposició nº 7.

Tesi nº 1. Proposició nº 7. La distància al Sol des de la Terra és més gran que 18 vegades, però més petita que 20 vegades, la distància a la Lluna des de la Terra.









ARIST. DE MAG.

tur neque esse in ipsa BED circumferentia. ergo intra ipsam sit necesse est. luna igitur infra solem fertur, & dimidiata existens minus quadrante à sole distat.

FED. COMMANDINVS.

A Erit BF axis coni solem, & lunam comprehendẽtis: atque erit perpendicularis ad maximum circulum, qui in luna opacum, & splendidum determinat] *Ex demonstratis in tertia propositione huius.*

B Et quoniam luna dimidiata existente maximus circulus iuxta determinantem in luna opacum & splendidum, & noster visus in vno sunt plano] *Ex antecedente.*

C Quare & ipsi AF, ac propterea angulus FBA rectus est] *Ex tertia diffinitione vndecimi elementorum.*

D Sed & obtusus est angulus BAF. quod fieri non potest] *Essent enim trianguli ABF tres anguli maiores duobus rectis.*

PROPOSITIO VII.

Distantia, qua sol à terra distat, distantię qua luna distat à terra maior quidem est, quàm duodeuigintupla, minor uero, quàm vigintupla.

Sit solis quidem centrum A; terræ vero centrum B. & iuncta AB producatur. lunæ autem dimidiatæ existentis centrum sit C: & per AB, & C planũ producatur, quod faciat sectionem in sphæra, per quam fertur

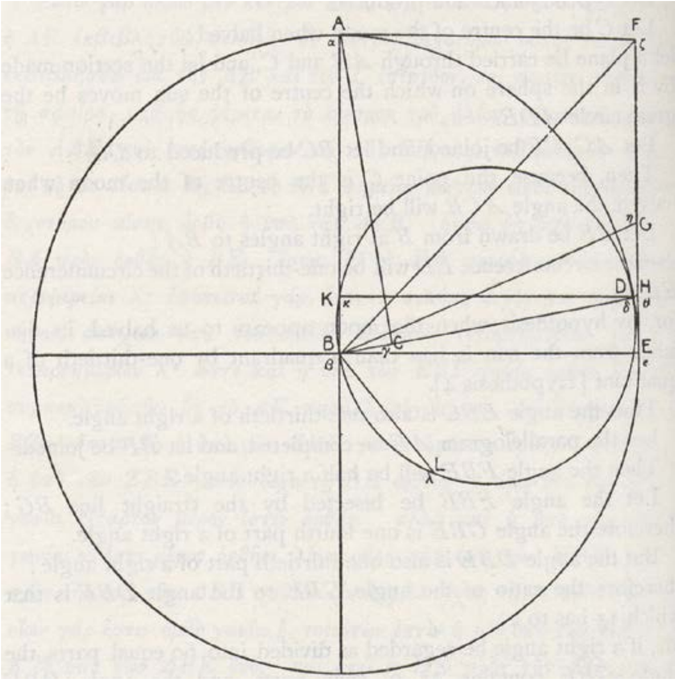
108

ET DIST. SOL. ET LVNAE. 14

fertur centrum solis, maximum circulum ADE, & AC CB iungãtur: producaturq́; BC in D. erit vtique angulus ACB rectus, propterea quòd pũctum C sit lunę dimidiatæ centrum. ducatur à puncto B ipsi BA ad rectos angulos BE. ergo circumferentia ED erit trigesima pars circumferentiæ EDA. positum est enim, cum luna dimidiata nobis apparet, distare eam à sole minus quadrante, quadrantis parte trigesima. quare & EBC angulus est trigesima pars vnius recti. compleatur parallelogrammum AE: & BF iungatur. erit angulus FBE recti dimidius. fece- 3. huius. A B

D 2 tur

109



Sigui A el centre del Sol, B el centre de la Terra. I C el centre de la Lluna quan se'ns mostra partida per la meitat, llavors CB representa la distància a la Lluna des de la Terra i AB representa la distància al Sol des de la Terra.

Hem de demostrar que:

$$18\ CB < AB < 20\ CB;\ \ 18 < AB/CB < 20$$

$$1/18 > CB/AB = \sin 3^{o} > 1/20$$

Les estratègies matemàtiques emprades en la demostració són:

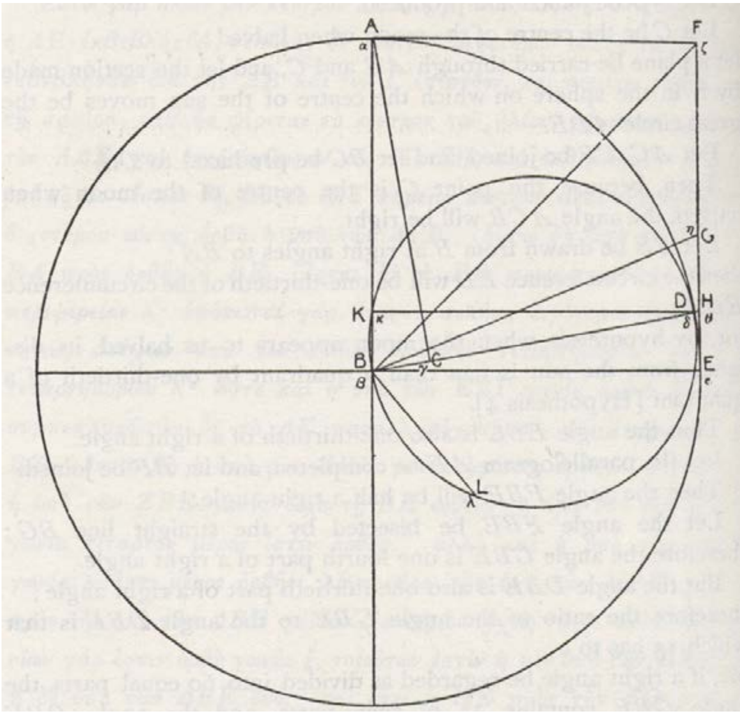
1)Traslladar el problema del triangle Sol-Terra-Lluna a un triangle semblant construint una circumferència adequada.

2) Utilitzar com si fos coneguda la relació entre els angles i les seves tangents.

3) Emprar la proporció establerta entre els segments que determinen la bisectriu d’un angle d’un triangle i els seus costats.

4) Aproximar l’arrel de 2 per 7/5.

Demostració 18 CB < AB



Traslladar el problema del triangle Sol-Terra-Lluna a un triangle semblant construint una circumferència adequada.

A=Sol B=Terra C=Lluna

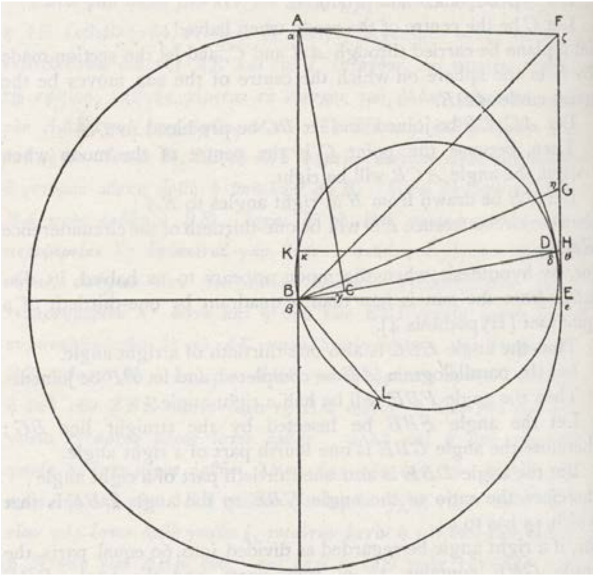
Triangle ABC= Triangle Sol-Terra-Lluna.

Hipòtesis nº 4: Angle ABC = 87º; Angle BAC = 3º; Angle ACB =90º

Construeixo un triangle semblant BHE

Angle BHE = 87º; Angle HBE = 3º; Angle HEB =90º

Demostració 18 CB<AB



GBE : < HBE = $(45/2)^{o}$: 3^{o} = 15 : 2; Utilitzar com si fos coneguda la relació entre els angles i les seves tangents: "tan a : tan b > a : b amb a,b <90^{o}".Llavors GE : EH ><GBE : <HBE = 15 :2 ; GE : EH > 15 : 2 (1)

Tot seguit cal emprar la proporció establerta entre els segments que determinen la bisectriu d'un angle d'un triangle i els seus costats, llavors: $FB^2 : BE^2 = FG^2 : GE^2$. Com que $FB^2 = 2\ BE^2$ llavors es verifica $FG^2 = 2\ GE^2$. Aproximar l'arrel de 2 per 7/5. $FG^2 : GE^2 = 2$; 2 = 50 : 25 > 49 : 25; FG : GE > 7 : 5 ; Prenent FE = FG + GE; FE : GE > 12 : 5.

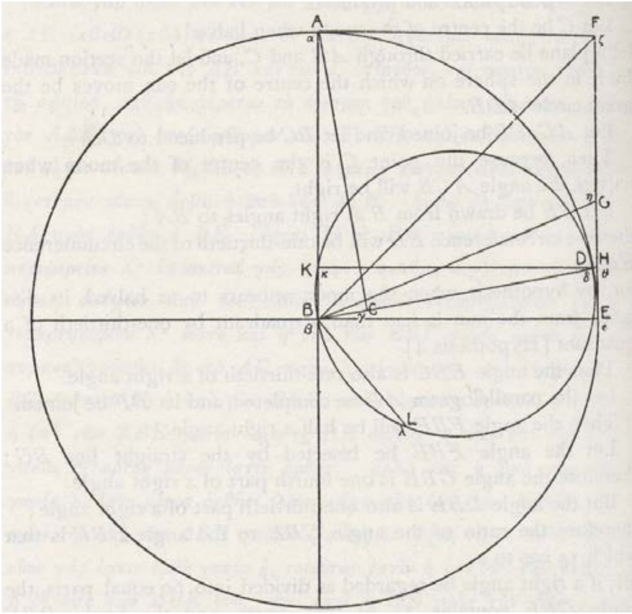
Però 12 : 5= 36 : 15; FE : GE > 36 : 15 (2)

Composant amb GE : EH > 15 : 2 (1) s'obté FE : EH > 36 : 2 = 18 : 1; BH > BE = FE, llavors BH : EH > 18:1

En ser ABC i BHE triangles semblants, AB : CB > 18 : 1

18 CB < AB

Demostració AB < 20BC



Tracem DK paral·lela a BE. Construïm el cercle DKB essent DB el diàmetre. Llavors angle HBE= 3^{o} i angle KDB= 3^{o} per angles oposats pel vèrtex. L'arc BK = 6^{o} ja que correspon a l'angle central.

Sigui BL el costat d'un hexàgon (60^{o}). Relació entre arcs i cordes:

Arc BL : Arc BK > BL : BK; Arc BK=6^{o} i Arc BL = 60^{o} llavors:

10 : 1 > BL : BK ; BL < 10 BK

BD = 2 r = 2 BL ja que BL és el costat del hexàgon. BL < 10 BK ;

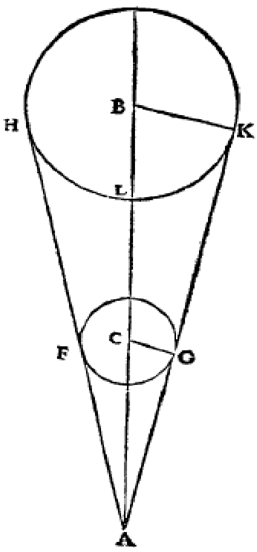
BD = 2 BL < 20 BK. Triangles semblants :

AB < 20 BC

Tesi nº 2. Proposició 9. El diàmetre del Sol és més gran que 18 vegades el diàmetre de la Lluna però més petita que 20 vegades aquest.

ET DIST. SOL. ET LVNAE. 18

los, in cono autem rectas lineas. faciat igitur in sphæris maximos circulos FG, KLH: & in cono rectas lineas AFH, AGK, & CG, BK iungantur. erit ut BA ad AC, ita BK ad CG. sed BA ipsius AC ostensa est maior, quidē, quā duodeuigitupla, minor vero, quā uigintupla. ergo & BK maior erit, quā duodeuigintupla ipsius CG, & minor, quā vigintupla.



4. sexti.

7. huius

PROPOSITIO X.

Sol ad lunam maiorem proportionē habet, quā 5832 ad 1, minorem vero quàm 8000 ad 1.

Sit solis quidē diameter A; lunę vero diameter B. ergo A ad B maiorē proportionē hēt, quā 18 ad 1, & minorē quā 20 ad 1. Et qm̄ cubus, qui fit ex A ad cubum qui ex B triplā proportionē hēt eius, quā A habet ad B: habet autem & sphæra circa diametrum

33 undecimi elemen. 18. duodecimi.

E 2 A ad

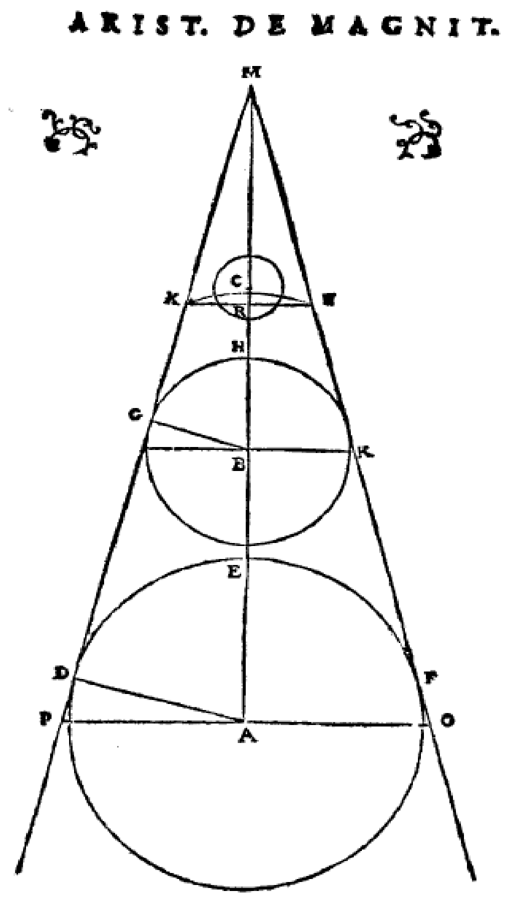
Dibuixeu un con amb el nostre ull al vèrtex. La base del con és el cercle màxim del Sol obtingut tallant per un pla la seva esfera. Entre el nostre ull i el cercle del Sol, es troba el cercle de la Lluna, també obtingut tallant la seva esfera per un pla. Llavors, estableix una proporció entre els costats dels triangles semblants ACG i ABK, on els costats són les distàncies i els radis del Sol i la Lluna. Aplicant la proposició 7 queda demostrat.

Proposició 10. El Sol té respecte a la Lluna una raó més gran que la de 5.832 a 1, però més petita que la de 8.000 a 1.

Aplicant la fórmula del volum als valors de la proposició 9.

Les proposicions 11 a 14 són lemes per la demostració de la proposició 15 que és la tercera tesis.

Tesi nº 3. Proposició 15. El diàmetre del Sol té respecte al diàmetre de la Terra una raó més gran que la de 19 a 3 però més petita que la de 43 a 6.



Empra la raó entre les distàncies de la proposició 7 i les hipòtesis 5 i 6, sobre la mida de l'ombra de la Terra i sobre l'angle de 2^o del con que subtendeix la Lluna, respectivament.

A partir d'aquesta relació entre els diàmetres en la proposició 16 conclou, elevant al cub, que la mida del Sol es més gran que 6.859/27 vegades la mida de la Terra i més petita que 79.507/216 vegades aquest.

Emprant aquests resultats en les proposicions 17 y 18 relaciona els diàmetres i elevant al cub les mides.

Característiques de l'obra d'Aristarc

Aristarc es planteja problemes de geometria plana tallant les esferes del Sol i de la Lluna en cercles màxims.

Per a resoldre els problemes geomètrics, recorre a relacions, considerades avui com raons trigonomètriques, entre els angles i els costats d'un triangle.

Els angles els expressa com fraccions d'angle recte i escriu les raons trigonomètriques com raons entre els costats dels triangles; així pot determinar les cotes superiors i inferiors del valor que busca.

Les proposicions geomètriques que Aristarc empra es troben majoritàriament en els *Elements* d'Euclides.

La teoria de proporcions d'Eudoxos del llibre V dels *Elements* és utilitzada constantment i les seves propietats d'invertir, alternar, compondre i multiplicar són aplicades tant per a proporcions d'igualtat com de desigualtat.

Aristarc es basa també implícitament en altres relacions, que per a nosaltres són trigonomètriques, com si les conegués o les considerés trivials.

El text és una col·lecció coherent de proposicions amb una descripció correlativa de les idees que vol mostrar tenint sempre present els seus objectius, és a dir, calcular les mides i les distàncies dels astres.

Les proposicions constitueixen exercicis matemàtics amb operacions entre raons, amb construccions geomètriques singulars que ens mostren la gran qualitat matemàtica de l'obra d'Aristarc.

És un text ric, ben estructurat i les demostracions són impecables pel que fa al rigor.

Totes aquestes figures es troben en el llibre que és la nostra traducció: Aristarco, 2007.

c) **Arquimedes de Siracusa (287 aC.-212 aC.)**

Arquimedes va néixer l'any 287 aC, a Siracusa, en el si d'una família emparentada amb el que a partir de l'any 265 aCseria el rei Hieró II, que havia consolidat el seu poder, després de les lluites intestines en l'illa de Sicília i de les intervencions cartagineses i del rei d'Epiro, Pirro, combatent als romans.

Hieró va ser sempre, durant cinquanta anys, un governant astut per la pau, aliat dels romans a la primera guerra púnica, i que va saber, a més de dirigir una administració eficient, afavorir l' Art i la Cultura. En aquest ambient propici es desenvoluparien els primers anys d' Arquímedes.

Arquimedes de Siracusa va ser un geni de la invenció. Quatre invents que encara són emprats avui: Va estudiar la teoria de la balança i va inventar la romana; va estudiar la mecànica de la palanca i va inventar un sistema diferencial de transmissió a base de cordes i tambors; va estudiar la línia helicoïdal i va inventar la rosca i el cargol sense fi.

Obres d'Arquimedes: La quadratura de la paràbola; Sobre l'esfera i el cilindre I; La mesura del cercle; Sobre l'esfera i el cilindre II; Sobre el conoides i l'esferoide ; Sobre les espirals; Sobre l'equilibri dels plans; El mètode mecànic; Sobre els cossos flotants; L'Arenari.

Mètode d'exhaustió. La mesura del cercle. Exercici Pràctic.

La tècnica dels antics, que avui s'anomena mètode d'exhaustió, va ser creada per Eudoxos i, posteriorment Euclides i Arquimedes la van emprar en una gran varietat de problemes a fi de determinar àrees de figures curvilínies, volums, superfícies i arcs. Aquesta tècnica, tot i ser tan rigorosa com altres, era, al mateix temps, extremadament laboriosa i no deixava gaire lloc a la intuïció. El mètode es basa en una sèrie de nocions que són indispensables per poder desenvolupar el procés. Aquestes nocions poden ser explicades com segueix (Baron, 1987: 35):

Qualsevol quantitat finita, tanmateix petita, pot arribar a ser tan gran com vulguem multiplicant-la per un nombre suficientment gran; o bé, donades dues magnituds desiguals a i b ($b<a$) llavors existeix, un nombre n tal que $nb>a$ (Euclides V, def. 4) o bé un nombre n tal que $n (a-b) > c$, on c és alguna magnitud del mateix tipus (L'axioma d'Arquimedes, *Sobre l'esfera i el cilindre,* Llibre I).Qualsevol quantitat finita pot arribar a ser tan petita com nosaltres vulguem per subtracció repetida d'una quantitat més gran, o igual a la seva meitat; o bé, donades dues quantitats desiguals a i $b(b<a)$, llavors existeix un nombre n, tal que $(1-p)na<b$, on $p\geq 1/2$ (Euclides X.1).

Per demostrar que A = B s'havia de provar la impossibilitat de A>B i de A<B. Així Arquimedes va obtenir les quadratures amb l'ajut de mètodes mecànics i va demostrar la validesa dels resultats obtinguts

mitjançant proves indirectes. Mesurava les figures curvilínies exhaurint-les mitjançant figures poligonals inscrites i circumscrites.

El procés consistia en l'establiment, a través de construccions geomètriques d'una seqüència ascendent monòtona In, i una seqüència monòtona descendent Cn, entre les quals hi ha la magnitud B de la qual hem de determinar el valor. Els termes In i Cn constitueixen perímetres, àrees de superfícies o volums de figures inscrites i circumscrites, respectivament, i la relació:

$I1 < I2 < I3 < \dots < In < B < Cn < \dots < C3 < C2 < C1$

es pot establir a partir d'una sèrie de lemes geomètrics coneguts. Utilitzant les nocions 1 i 2, i la construcció particular adoptada per In i Cn es demostra que, per a algun n, la diferència $(Cn - In)$ pot arribar a ser més petita que qualsevol magnitud donada o que la raó Cn / In pot arribar a ser més petita que la raó de la més gran a la més petita de dues magnituds donades qualssevol. El càlcul consisteix en el fet que, trobada una magnitud A, que per a tots els valors de n està entre In i Cn, aquesta magnitud A ha de ser igual a B. Per provar-ho es demostra la impossibilitat que $A<B$ i $A>B$. Tanmateix en el mètode d'exhaustió cada proposició es feia de bell nou i no s'utilitzaven resultats d'altres proposicions. A més, no es donaven ni s'intentaven donar regles per fer nous càlculs.

La pràctica emprant el text d'Arquimedes en la mesura del cercle permet relacionar la geometria del cercle i les mesures (Arquimedes, 1921).

Thus the area of the polygon is greater than K.

Let AE be any side of it, and ON the perpendicular on AE from the centre O.

Then ON is less than the radius of the circle and therefore less than one of the sides about the right angle in K. Also the perimeter of the polygon is less than the circumference of the circle, i.e. less than the other side about the right angle in K.

Therefore the area of the polygon is less than K; which is inconsistent with the hypothesis.

Thus the area of the circle is not greater than K.

II. If possible, let the circle be less than K.

Circumscribe a square, and let two adjacent sides, touching the circle in E, H, meet in T. Bisect the arcs between adjacent points of contact and draw the tangents at the points of bisection. Let A be the middle point of the arc EH, and FAG the tangent at A.

Then the angle TAG is a right angle.

Therefore $$\begin{aligned} TG &> GA \\ &> GH. \end{aligned}$$

It follows that the triangle FTG is greater than half the area $TEAH$.

Similarly, if the arc AH be bisected and the tangent at the point of bisection be drawn, it will cut off from the area GAH more than one-half.

Thus, by continuing the process, we shall ultimately arrive at a circumscribed polygon such that the spaces intercepted between it and the circle are together less than the excess of K over the area of the circle.

Thus the area of the polygon will be less than K.

Now, since the perpendicular from O on any side of the polygon is equal to the radius of the circle, while the perimeter of the polygon is greater than the circumference of the circle, it follows that the area of the polygon is greater than the triangle K; which is impossible.

But $$\frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}$$
$$\left[< 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}}\right]$$
$$< 3\tfrac{1}{7}.$$

Therefore the circumference of the circle (being less than the perimeter of the polygon) is *a fortiori* less than $3\frac{1}{7}$ times the diameter AB.

II. Next let AB be the diameter of a circle, and let AC, meeting the circle in C, make the angle CAB equal to one-third of a right angle. Join BC.

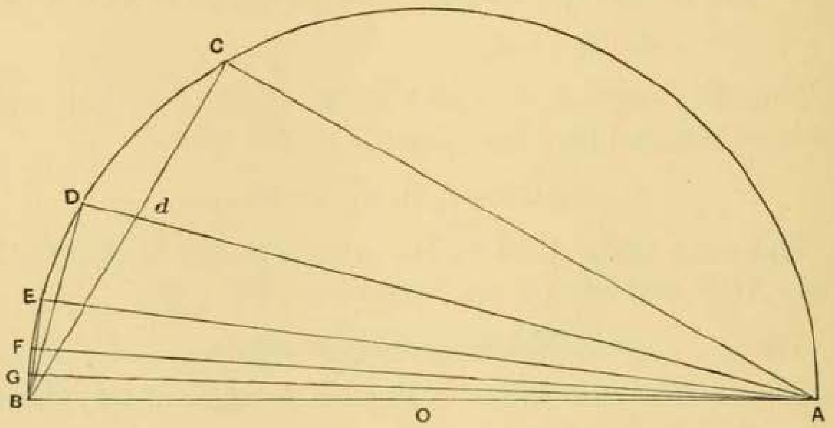
Then $$AC : CB\,[=\sqrt{3} : 1] < 1351 : 780.$$

First, let AD bisect the angle BAC and meet BC in d and the circle in D. Join BD.

Then $$\angle BAD = \angle dAC$$
$$= \angle dBD,$$

and the angles at D, C are both right angles.

It follows that the triangles ADB, $[ACd]$, BDd are similar.



Therefore $$AD : DB = BD : Dd$$
$$[= AC : Cd]$$
$$= AB : Bd \qquad \text{[Eucl. VI. 3]}$$
$$= AB + AC : Bd + Cd$$
$$= AB + AC : BC$$

or $$BA + AC : BC = AD : DB.$$

[And $\qquad AB^2 : BG^2 < \{(2016\tfrac{1}{6})^2 + 66^2\} : 66^2$

$\qquad\qquad < 4069284\tfrac{1}{36} : 4356.]$

Therefore $\qquad AB : BG < 2017\tfrac{1}{4} : 66,$

whence $\qquad BG : AB > 66 : 2017\tfrac{1}{4}$.....................(7)

[Now the angle BAG which is the result of the fourth bisect of the angle BAC, or of one-third of a right angle, is equal one-fortyeighth of a right angle.

Thus the angle subtended by BG at the centre is

$$\tfrac{1}{24} \text{ (a right angle).]}$$

Therefore BG is a side of a regular inscribed polygon of sides.

It follows from (7) that

$$\text{(perimeter of polygon)} : AB\ [> 96 \times 66 : 2017\tfrac{1}{4}]$$

$$> 6336 : 2017\tfrac{1}{4}.$$

And $$\frac{6336}{2017\frac{1}{4}} > 3\tfrac{10}{71}.$$

Much more then is the circumference of the circle greater th $3\tfrac{10}{71}$ times the diameter.

Thus the ratio of the circumference to the diameter

$$< 3\tfrac{1}{7} \text{ but } > 3\tfrac{10}{71}.$$

d) Diofant d'Alexandria (250-350 dC)

Dins d'aquest recorregut històric pel món grec cal citar també una altra obra que encara que no soluciona les equacions de segon grau amb l'algorisme tradicional ho fa amb artificis aritmètics molt enginyosos. Es tracta de *L' Aritmètica* de Diofant d'Alexandria.

De la vida de Diofant tan sols es coneix la seva associació amb la ciutat d'Alexandria, el seu Museu (primer institut científic que registra la història) i la seva Biblioteca (la primera de caràcter universal) i l' especulació de que possiblement va viure en el segle III dC.

> *Passejant, aquesta és la tomba de Diofant:*
>
> *És ell qui amb aquesta sorprenent distribució t'explica el nombre d'anys que va viure:*
>
> *La seva infància va durar la sisena part de la seva vida; la barba li va créixer després d'una dotzena part més; es va casar després d'una setena part, li va nàixer un fill cinc anys més tard; aquest fill va viure la meitat d'anys que el seu pare i el pare va morir quatre anys després del seu fill.*

L' *Aritmètica* consta de 13 llibres dels quals només se'n conserven sis. Constitueix un recull de 189 problemes independents d'anàlisi algebraica on les demostracions aritmètiques no es sotmeten a justificació geomètrica, probablement va ser pensat per ajudar els estudiants a aprendre la matèria.

Tots els problemes es caracteritzen pel fet que les seves solucions no consideren mai més que una incògnita, sigui quin sigui el nombre d'incògnites a trobar. Quan la solució d'un problema esdevé irracional o imaginària , declara que la solució és "impossible". Quan dóna una solució negativa, declara que l'equació és "absurda", així no reconeix que l'equació quadràtica té sempre dues solucions.

Pel que fa a la notació val a dir que el llibre I està precedit per un preàmbul on explica les notacions que tanmateix després no utilitza. Diofant designa la incògnita de primer grau d'una manera abstracta sota el nom de "nombre" (o sigui "aritme"). Pel que fa a l'estil abunden els imperatius i altres referències verbals que individualitzen i apunten directament al lector.

Quant al mètode de demostració, es considera en general que no existeix un mètode sistemàtic per resoldre les equacions indeterminades de Diofant, ja que utilitzava tècniques i conceptes matemàtics que no havien estat prèviament teoritzats. Es creu que era un virtuós, molt hàbil amb l'ús d'artificis elegants que, si bé li permetien cada vegada trobar una solució particular d'una equació indeterminada o d'una equació de primer o segon grau, no pretenien cap generalització. No hi havia una teoria prèvia ni unes regles clares. Es tractava de trobar solucions a equacions concretes de segon grau o fins i tot a equacions indeterminades. No resolia problemes referits a la vida real i es conformava en donar una solució, en trobar un nombre que verifiqui l'enunciat.

Diofant d'Alexandria. Pràctica.

Vegeu un exemple d'un problema resolt per Diofant.

> Llibre I. Proposició XXVII. Trobeu dos nombres tals que la seva suma i el seu producte són dos nombres donats [En llenguatge actual: x + y = b; xy = c].
>
> És necessari que el quadrat de la semisuma dels nombres que busquem excedeixi en un quadrat el producte d'aquests nombres; cosa que per suposat es pot representar [Aquí utilitza la identitat: $(\frac{x+y}{2})^2 - x.y = (\frac{x-y}{2})^2$].
>
> Proposem doncs que la suma dels nombres sigui 20 unitats i que el seu producte sigui 96 unitats [Ho resol en el cas particular $x+y=20$ i $xy = 96$].
>
> Que l'excedent dels dos nombres sigui 2 "arithmos" [$2.t$]. Llavors com que la suma dels dos nombres és 20 unitats, si la dividim en dues parts iguals, cadascuna de les parts serà la meitat de la suma, o sigui 10 unitats. Doncs, si afegim a una de les parts i si trèiem de l'altra part la meitat de l'excedent dels nombres, és dir, 1 "arithmos", s'estableix de nou que la suma dels nombres és 20 unitats i que el seu excedent és 2 "arithmos". En conseqüència posem que el nombre més gran és 1 "arithmos" augmentat en 10 unitats que són la meitat de la suma dels nombres [$10 + t$]; llavors el nombre més petit serà 10 unitats menys 1 "arithmos" [$10 - t$], i s'estableix que la suma

> dels nombres és 20 unitats i que el seu excedent és 2 "arithmos".
>
> També és necessari que el producte dels nombres sigui 96 unitats [$(10 + t).(10 - t) = 96$]. El seu producte és 100 unitats menys 1 quadrat d'"arithmos"; que igualem a 96 unitats [$100 - t^2 = 96$] i l'"arithmos" esdevé 2 unitats [$t = 2$]. En conseqüència, el nombre més gran serà 12 unitats [$x = 2 + 10$], el més petit serà 8 unitats [$y = 10 - 2$], i aquests nombres compleixen la proposició.

Cal assenyalar que Diofant explicita una condició per poder resoldre aquesta equació: la diferència entre el quadrat de la semisuma i el producte de dues quantitats ha de ser un quadrat perfecte. La suma i el producte no poden ser nombres qualssevol i només pot resoldre-ho amb aquest procediment utilitzant els nombres adients. Exercici pràctic. Reproduïu el problema i raoneu el perquè de la última afirmació.

Bibliografia Tema 1

ARISTARCO DE SAMOS**.** *Sobre los tamaños y las distancias del Sol y la Luna.* ISBN: 978-84-9828-132-3. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz, 2007. Introducción, traducción y notas de Mª Rosa Massa Esteve.

ARCHIMÈDES, *Les œuvres complètes d'Archimède*, traduites du grec en français avec une introduction et des notes, par Paul Ver Eecke, 1921, Desclée, Paris.

ARCHIMÈDE, *Des spirales, De l'équilibre des figures planes, L'arénaire, La quadrature de la parabole,* CHARLES MUGLER (Trad.) Paris : Les Belles Lettres, 1971.

BARON, M., 1969. *The Origins of the Infinitesimal Calculus.* Dover Publications. New York.

BASHMAKOVA, I. & SMIRNOVA, G. *The Beginnings and Evolution of Algebra.* The Mathematical Association of America, 2000.

BERGGREN, J. L. & SIDOLI, N., **"**Aristarchus's On the Sizes and Distances of the Sun and Moon: Greek and Arabic Texts**",** *Archive for History of Exact Science,* **61**(2007), 213- 254.

BERRY, A., *A Short History of Astronomy*, Nueva York: Dover, 1961(1ra ed. John Murray, 1898).

BOWEN, A. C. & GOLDSTEIN, B. R., "Aristarchus of Samos, Thales and Heraclitus on Solar Eclipses: An Astronomical Commentary on P. Oxy. 53.3710 cols. 2.33-3.19", *Physis* **31.3** (1994), pp. 689-729.

CAVEING, M.,*Essai sur le savoir Mathématique. Dans la Mésopotamie et l'Égypte anciennes,* Lille, Presses Universitaires de Lille, 1994.

CHERMISS, H.-HELMBALD, W., *Plutarch's Moralia,* Londres: Cambridge-Mass., 1957.

COUCHOUD, Sylvia. *Mathématiques égyptiennes: Recherches sur les connaissances mathématiques de l'Égypte pharaonique*. París: Éditions Le Léopard d'Or, 1993.

COPÉRNICO, N. *Sobre las revoluciones,* CARLOS MÍNGUEZ PÉREZ (Trad.) Madrid: Editorial Tecnos S. A., 1987.

CHRISTIANIDIS, J., *Les équations F(x,y)=0 dans les Arithmétiques et la méthode de Diophante,* "Histoire de la lecture des anciens en mathématiques", Luminy (Marseille), 1995

DIOPHANTE D'ALEXANDRIE. *Les six livres arithmètiques et le livre des nombres polygones*. Trad. francesa del grec P. V. Eecke. Paris, Albert Blanchard, 1959.

DIOFANTO DE ALEJANDRIA. *La Aritmètica y el libro Sobre los números poligonales.* Tomos 1 y 2. Versión en castellano, introducción, notas y apéndices de Manuel Benito Muñoz, Emilio Fernández Moral y Mercedes Sánchez Benito. Epistéme /6 y 7. Madrid, Ed. Nivola, 2008.

DOU, A. "Euclides" a *Historia de Matemática. Hasta el Siglo XVII*. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid, 61-78, 1986.

DREYER, J.L.E.. *A History of Astronomy from Thales to Kepler*, Nova York: Dover Publications, 1953 (1ra Ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1906).

ERHARDT, R. V. & ERHARDT-SIEBOLD, E. V.,"Archimedes' Sand-Reckoner: Aristarchos and Copernicus, *Isis,* Vol. 33, Nº 5. (Mar., 1942), 578-602.

EUCLIDES, *Elementos. Vol. 1, libros I-IV.* Int. de Luis Vega. Trad. i notes deMaría Luisa PUERTAS CASTAÑOS. Madrid: Gredos, 1991. *Vol. 2, libros V-IX*. Trad. i notes de M. L. PUERTAS CASTAÑOS. Madrid: Gredos, 1994. *Vol. 3, libros X-XIII.* Trad. i notes de M. L. PUERTAS CASTAÑOS. Madrid: Gredos, 1996.

EUCLID**.** *The Elements*, trad. Thomas L. Heath, vol.1., Nova York, Dover, 1956.

FOWLER, D. & ROBSON, E. "Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289 i Context", *Historia Mathematica* 25, (1998), 366-378.

GILLINGS, Richard J., *Mathematics in the Time of the Pharaohs,* Mineola, N. Y.: Dover Publications Inc, 1982. (First édition, 1972)

HEATH, T. L. *Aristarchus of Samos. The Ancient Copernichus*. Nueva York: Dover Publications, 1981 (1ra Ed. Oxford: Clarendon Press, 1913).

HEATH, T. L. *A History of Greek Mathematics*, I y II, Nueva York: Dover Publications, 1981b (1ra Ed. Oxford: Clarendon Press,1921).

HOYRUP, J. *Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin,* Nova York, Springer-Verlag, 2002.

KLEIN, J., *Greek Mathematical thought and the Origin of Algebra*, Cambridge, 1968.

KRANZBERG, M. *Historia de la Tecnología.* Vol. 1, Ed. Gustavo Gili, Barcelona, 1981.

MAEYAMA, Y., "Ancient stellar observations: Timocaris, Aristilo, Hipparcus, Ptolemy –the date and accuracies", *Centaurus*, **27** (3-4), (1984), 280-310

MAHONEY, M. S.,"Another Look at Greek Geometrical Analysis", *Archive for History of Exact Sciences,* 5, (1968), 318-348.

MASSA ESTEVE, M. R., "L'Ensenyament de la trigonometria. Aristarc de Samos (310-230 aC)" en P. GRAPI & M. R. MASSA [ed.]: *Actes de la I Jornada sobre Història de la Ciència i Ensenyament "AntoniQuintana Marí"*, Barcelona, (2005), 95-101.

NEUGEBAUER, O. *The exact sciences in Antiquity*. Dover, Nova York, 1969.

NEUGEBAUER, O., "Archimedes and Aristarchus", *Isis* 34, (1942), 4-6.

PAPPUS D'ALEXANDRIE, *La Collection Mathématique*, 2 Tomos, PAUL V.EECKE [Trad.], Paris : Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 1982

RITTER, J. , “ Babilonia (1800 a.C.)” a SERRES, M., *Historia de las Ciencias,* Madrid, Ed. Cátedra, 1991.

RITTER, J., «A cada uno su verdad: las matemáticas en Egipto y Mesopotamia» a SERRES, M., *Historia de las Ciencias,* Madrid, Ed. Càtedra, 1991.

ROERO, C. S., "Egyptian mathematics" a *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, vol I, Grattan-Guinness (ed.). Londres-Nova York, 1994.

STHAL, W. H., “Aristarchus of Samos”. En : GILLISPIE, C. C. [ed.].*Dictionary of Scientific Biography,* Nueva York, 246-250.

TANNERY, P., *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*, Nova York : Georg Olms Verlag Hildesheim, 1976 (1ra Ed., Paris : Éditions Gauthier-Villars & Fils, 1893).

TANNERY, P., *Pour l'histoire de la Science Hellène. De Thalès a Empedocle,* Paris : Éditions Jacques Gabay, 1990 (2da. Ed., Paris : Gauthier-Villars et Cie, 1930).

TANNERY, P., *Mémoires Scientifiques,* 6 vols., en HEIBERG, J. L. & ZEUTHEN, H. G. [ed.], Paris : Éditions Jacques Gabay, 1995-1996 (1ra. Ed., Paris : Gauthier-Villars et Cie, 1912-1950).

VAN DER WAERDEN, B. L . *Science Awakening* , 2nd ed. Groningen i Leyden, Noodhoff, 1974.

WALL, B. E., "The Historiography of Aristarchus of Samos", *Studies in the History and Philosophy of Science"*, 6, 1975, 201-228.

TEMA 2. De la ciència àrab al Renaixement
(ca. 700 - ca. 1500)

2.1 Les matemàtiques en el món àrab

Món àrab

Cal recordar que mentre l'imperi romà va desaparèixer a Occident i amb ell es va produir la decadència de la ciència grega, l'imperi a Orient es va mantenir. El profeta Mahoma nascut l'any 580, va formar un estat mahometà a la Meca l'any 622, que es va anar expandint fins al segle XII.

Allà va prendre importància el llenguatge "siríac" encara que el grec segueix sent conegut per tots els savis. Es tradueixen moltes obres del grec al siríac i els perses creen diversos centres científics.

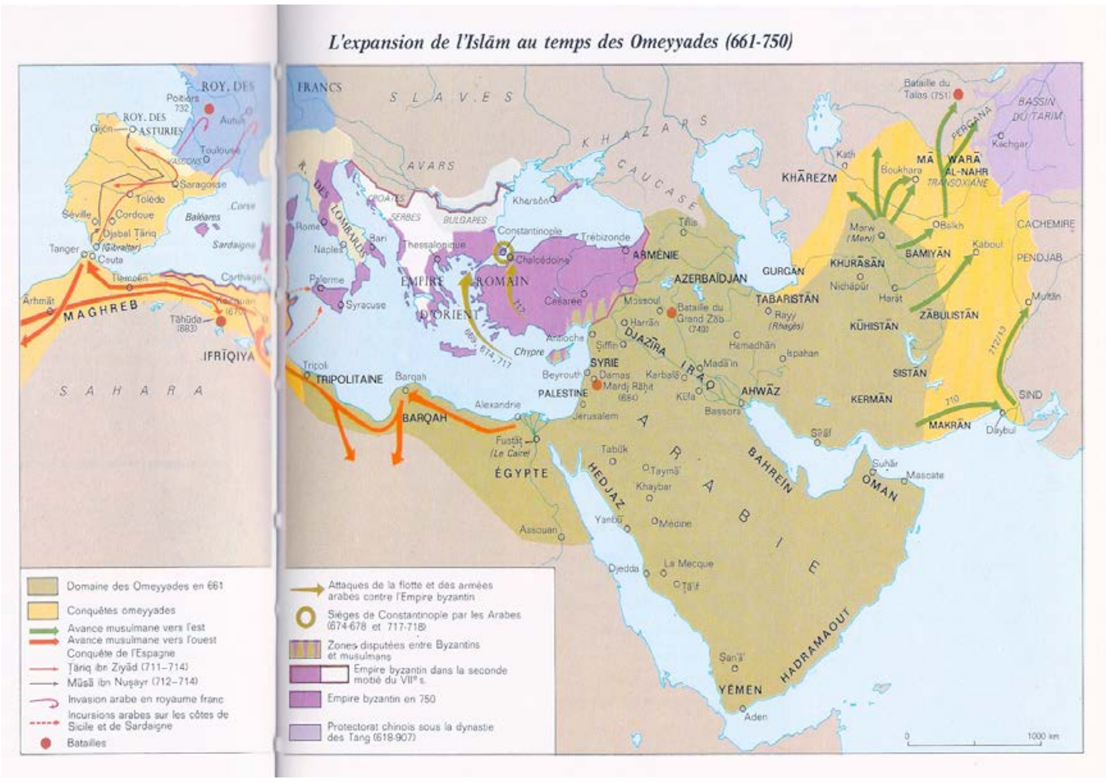


Figura 1. L'expansió de l'Islam. Google Imatges.

Els perses possiblement varen rebre influències dels hindús; així, a Aryabhata (500 dc.) es solucionen diverses equacions, també Brahmagupta en la seva obra d'astronomia dedica dos capítols a les matemàtiques.

Bagdad és el gran centre científic on hi varen arribar i es varen traduir les grans obre gregues com ara els *Elements* d'Euclides, l'*Almagest* de Ptolemeu, i també s'hi varen elaborar noves taules astronòmiques,...

Després de Bagdad, altres focus de cultura varen ser: El Caire, Córdova, Samarcanda, Isfahan,...

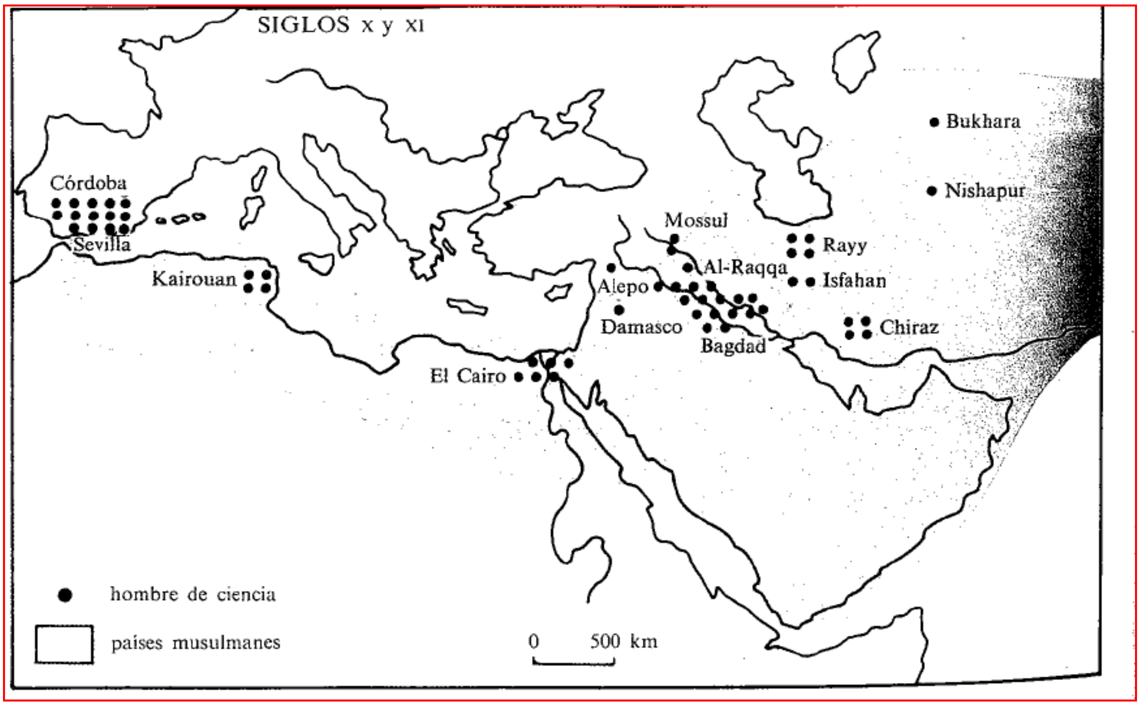


Figura 2. Les ciutats importants i els centres científics (Serres, 1991)

Les contribucions dels àrabs

Els àrabs van jugar un paper fonamental en el desenvolupament de l'àlgebra i de la trigonometria. També van fer importants contribucions en física, astronomia, alquímia i medicina.

Van recollir el saber grec i hindú, i van millorar i transformar aquests coneixements a partir dels recursos de la seva pròpia civilització.

Els inicis de l'àlgebra. Mohamed Ben Musa Al-khwarizmi

Mohamed Ben-Musa al-Khwarizmi, matemàtic, astrònom i membre de la Casa de la Saviesa de Bagdad, va morir el 850 dC. i és considerat com el creador de les regles de l'àlgebra.

La seva obra *Hisâb al-jabr wal-muqqabala* (813) va ser traduïda al llatí per Roberto de Chester amb el títol *Liber algebrae et almucabala* (Segòvia, 1145), d'on prové el nom actual d'àlgebra.

Al-khwarizmi al començament de l'obra *Hisâb al-jabr wal-muqqabala* explica:

> *"El meu propòsit és compondre una obra breu sobre el càlcul per les regles de compactació i reducció, limitant-nos al que és a la vegada més fàcil i més útil en l'aritmètica, i que els homes necessiten constantment en els casos d'herències, llegats, particions, plets així com en el comerç i en totes les relacions dels uns amb els altres, o bé on es necessiten mesures de terres, excavacions de canals, càlculs geomètrics i altres assumptes de molts diversos tipus."* (Mohamed, 1986)

L'obra d'al-Khwarizmi, constava d'una part teòrica amb el mètode per resoldre equacions amb coeficients positius (que classificava en sis tipus, fins a segon grau) i una part pràctica que contenia problemes il·lustratius de cadascun dels tipus: problemes de nombres, de comerç, de dots, del blat i la civada, dels exèrcits i dels correus.

Totes les altres àlgebres àrabs, basades en aquesta, conservaven aquesta estructura. Les equacions les estructuraven en sis tipus d'igualtat, amb coeficients positius, sense escriure cap símbol: "Quadrats igual a arrels", "Quadrats igual a nombres", "Arrels igual a nombres", "Quadrats i arrels igual a nombres", "Quadrats i nombres igual a arrels", "Arrels i nombres igual a quadrats".

$$\boxed{\begin{gathered} ax^2 = bx,\ ax^2 = c,\ bx = c,\ ax^2 + bx = c, \\ ax^2 + c = bx,\ ax^2 = bx + c. \end{gathered}}$$

Primer donaven, amb llenguatge retòric, l'algorisme de resolució de cada tipus mitjançant un exemple numèric i, després, en la part pràctica, cada vegada que en un problema plantejaven una equació donaven el tipus i la solució, sense fer les operacions.

68 LIBER ALGEBRAE ET ALMUCABOLA

inuentum, scilicet radicibus, substantiis et numeris. Solus numerus tamen neque radicibus neque substantiis vlla proportione coniunctus est. Earum igitur radix est omnis res ex vnitatibus cum se ipsa multiplicata aut omnis numerus supra vnitatem cum se ipso multiplicatus: aut quod infra vnitatem diminutum cum se ipso multiplicatum reperitur. Substantia verò est omne illud quod ex multiplicatione radicis cum se ipsa colligitur. Ex his igitur tribus modis semper duo sunt sibi inuicem coaequantia, sicut diceres

Substantiae radices coaequant
Substantiae numeros coaequant, et
Radices numeros coaequant.

De substantiis radices coaequantibus. Ca [put] pri [mum].
Substantiae quae radices coaequant sunt, si dicas,
Substantia quinque coaequatur radicibus.

Radix igitur substantiae sunt 5, et 25 ipsam componunt substantiam, quae videlicet suis quinque aequatur radicibus. Et etiam si dicas,

Tertia pars substantiae quatuor aequatur radicibus:

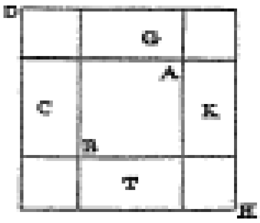
Radix igitur substantiae sunt 12, et 144 ipsam demonstrant substantiam. Et etiam ad similitudinem,

Quinque substantiarum 10 radices coaequantium. Vna igitur substantia duabus radicibus aequiparatur, et radix substantiae sunt 2 — et substantiam quaternarius ostendit numerus.

Figura 3. Pàgina de la traducció llatina de Roberto de Chester (1145)

Els termes: "al-jabr" / chéber o restauració, significa eliminar totes les quantitats que tinguin signe negatiu,"wa"/i ,"al-muqabala" /reducció: agrupar els termes de la mateixa espècie.

thirty-nine, in order to complete the great figure in its four corners; because the fourth of any number multiplied by itself, and then by four, is equal to the product of the moiety of that number multiplied by itself.* Accordingly, we multiplied only the moiety of the roots by itself, instead of multiplying its fourth by itself, and then by four. This is the figure: (10)



The same may also be explained by another figure. We proceed from the quadrate A B, which represents the square. It is our next business to add to it the ten roots of the same. We halve for this purpose the ten, so that it becomes five, and construct two quadrangles on two sides of the quadrate A B, namely, G and D, the length of each of them being five, as the moiety of the ten roots, whilst the breadth of each is equal to a side of the quadrate A B. Then a quadrate remains opposite the corner of the quadrate A B. This is equal to five multiplied by five: this five being half of the number of the roots which we have added to each of the two sides of the first quadrate. Thus we know that

Figura 4. Pàgina de la traducció anglesa de Rosen (Mohamed, 1986)

Quadrats més arrels igual a nombres, amb un exemple:

un quadrat més deu arrels és igual a trenta-nou unitats. Quan és l'arrel i quan el quadrat? $x^2 + 10x = 39$

Dividiu per dos el nombre d'arrels, (dóna 5 [b/2]). Aquest multipliqueu-lo per ell mateix; (el producte és 25 [(b/2)2]).

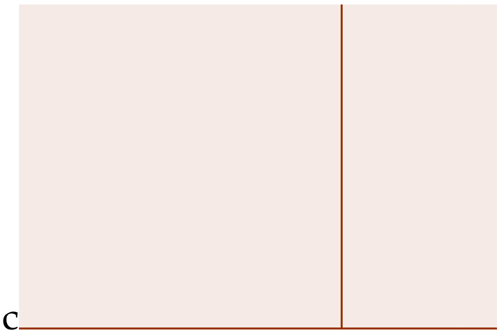
I el que resulti afegiu-ho a les unitats (39); la suma serà 64 [(b/2)2 + c].

Ara pren l'arrel d'aquest, que és 8, [(b/2)2 + c]1/2, i resta-li la meitat de les arrels, (que és 5); la resta és 3 [-(b/2) + ((b/2)2 + c)1/2]. Aquesta és l'arrel del quadrat que busquem i el quadrat mateix és 9.

La comprovació d'això consisteix en que sumis el quadrat, que ès 9, amb 10 arrels seves, que són 30, i s'obté el total, 39, com es va proposar. (Massa, 2005).

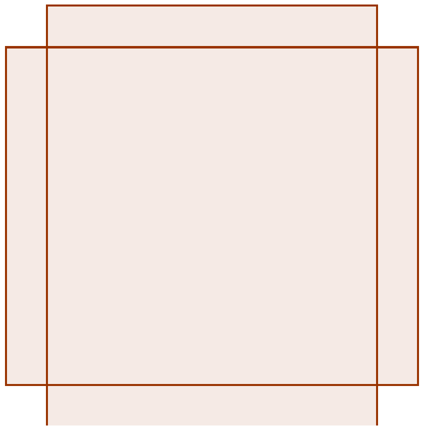
La justificació geomètrica

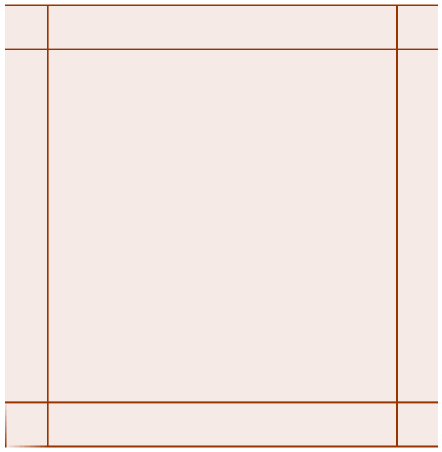
$x^2 + bx = c$



$x\ (x + b) = c$

$x^2 + 4\ (x.b/4) = c$





$$x^2 + 4\,(x.b/4) + 4\,(b/4)^2 = (x+b/2)^2$$

$$c + 4\,(b/4)^2 = c + (b/2)^2$$

$$(x+b/2)^2 = c + (b/2)^2$$

$$x+b/2 = [c + (b/2)^2]^{1/2}$$

$$x = -\,b/2 + [c + (b/2)^2]^{1/2}$$

Els inicis de la trigonometria plana. La contribució dels àrabs.

Idees trigonomètriques

- Babilònia (aprox. 1.800 aC)
- Papir *Rhind* (aprox. 1.650 aC)
- *Sobre les mides i les distàncies del Sol i la Lluna* (aprox. 230 aC). Aristarc de Samos
- *Elements*(aprox. 300 aC). Euclides

Cordes i arcs

- Hipparc de Nicea (190-120 aC.)
- *Les Esfériques* (aprox. 80) Menelau(aprox. 100) (Teorema de Menelau)
- *Almagest* (aprox. 150). Ptolemeu (85-165) (Teorema de Ptolemeu)

Sinus d'un arc

- *Tractat sobre el cuadrilàter complet* (1260). Nassir-al-Din al-Tusi (1201-1274).
- *Els triangles de qualsevol mena* (1464). Regiomontanus (1436-1476).
- *Trigonometria* (1600). Pitiscus (1561-1613)

Trigonometria. Pinzellada històrica (Romero-Massa-Casals, 2006)

No hi ha cap historiador que s'atreveixi a fixar els inicis del desenvolupament de la ciència trigonomètrica. La trigonometria segurament va sorgir a través de diferents fils conductors i associada a d'altres disciplines com ara l'aritmètica, la geometria i, més tard, l'àlgebra.

Però la trigonometria en sentit modern es considera que comença amb Hipparc de Nicea (190-120 aC.) que va ser el primer en sistematitzar les relacions entre les cordes i els arcs d'una circumferència disposant-les en forma de taules.

Segons Theó d'Alexandria (365 dC.) aquestes taules d'Hipparc es trobaven en 13 llibres que s'han perdut. El mètode d'Hipparc per a compondre les taules de cordes amb mètodes geomètrics sembla que va ser seguit i millorat molts anys després per Claudi Ptolemeu (85-165 dC.) en la seva obra *Almagest*.

Ptolemeu fa la construcció de la taula de cordes en el capítol 10 del llibre I. Divideix la circumferència en 360 parts i calcula les cordes amb intervals de mig grau en un sistema on el diàmetre està dividit en 120 parts.

Els càlculs de les primeres cordes els fa mitjançant la inscripció de polígons en un cercle. Així calcula la corda que correspon a l'angle de 60º (angle central de l'hexàgon) que té la mateixa mesura que el radi.

Després calcula les cordes corresponents als angles de 36º (angle central del decàgon) i 72º (angle central del pentàgon) basant-se en la proposició XIII. 10 dels *Elements* d'Euclides que demostra que el quadrat del costat d'un pentàgon regular inscrit en un cercle és igual a la suma dels quadrats dels costats de l'hexàgon i el decàgon regular inscrits en el mateix cercle.

Ptolemeu també calcula les cordes dels angles de 90º i 120º, angles centrals del quadrat i el triangle equilàter respectivament). Les cordes dels angles restants les calcula aplicant altres teoremes i fent les sumes, diferències, meitats i complementaris dels que ha calculat prèviament.

Sinus d'un arc

Tractat sobre el cuadrilàter complet (1260). Nassir-al-Din al-Tusi (1201-1274).

En el cas concret del desenvolupament de la trigonometria les obres dels àrabs són una peça clau ja que si la corda va ser un element essencial dins de la trigonometria grega, **el sinus d'un arc o d'un angle considerat com la meitat de la corda de l'angle doble,** va esdevenir la base de la trigonometria àrab i així els coneixements trigonomètrics àrabs van arribar a ser els fonaments de la nostra trigonometria actual.

Es pot considerar que els àrabs van ser els primers a fer un tractament sistemàtic de la trigonometria com a ciència molt evolucionada i independent de les seves aplicacions en l'astronomia i altres ciències.

Els astrònoms àrabs utilitzant fonts gregues i hindús van avançar molt en la trigonometria esfèrica. La resolució de problemes trigonomètrics era de gran ajuda per poder calcular distàncies en astronomia i la resolució de triangles esfèrics s'utilitzava per poder conèixer la direcció de La Meca.

Les obres fonamentals en què es van basar els àrabs pel tractament de la trigonometria van ser: els *Elements* (300 aC) d'Euclides, *LesEsfèriques* (80 dC) de Menelau (de la qual només es conserva la traducció àrab), l'*Almagest* (150 dC) de Ptolemeu i textos astronòmics hindús com ara *Surya Siddhanta* (400 dC) i *Aryabhatiya* (510 dC) d'Aryabhata (476-550).

Les contribucions dels àrabs al desenvolupament de la trigonometria es concreten en:

a) la introducció de les sis raons trigonomètriques a partir de les demostracions del teorema de Menelau en triangles esfèrics. Aquí podem citar Tabit B. Qurra (836-901), Al-Battani (900 dC), Al-Biruni (973-1048) i Nasir al-Din al-Tusi (1201-1274);

b) la deducció del teorema del sinus i el teorema de les tangents (tant per triangles plans com esfèrics) i

c) la construcció de taules trigonomètriques molt més detallades, fent servir procediments d'interpolació lineal, quadràtica i resolució d'equacions cúbiques per mètodes iteratius.

Aquí podem citar a tall d'exemple, les taules de sinus d'Al-Khwarizmi (846 dC) explicades a Mc Carthy, 2003: 245-250 i Samsó, 1980: 63 i les taules de tangents d' Ibn Mu'ad (989-1050) analitzades a Villuendas, 1979 i Samsó, 1980: 62-63.

L'anàlisi de part de l'obra *Tractat sobre el quadrilàter complet*(1260) de Nasir Al-Din Al-Tusi (1201-1274) il·lustra l'aportació dels àrabs a la ciència trigonomètrica.

Aquesta obra és significativa pel tractament sistemàtic que fa Al-Tusi de la trigonometria plana i esfèrica i també perquè és palesa la influència d'aquesta obra en *De triangulis Omnimodis* (1464) de Regiomontanus on es recopilava el saber trigonomètric de l'època i s'introduïen a Europa els avenços trigonomètrics àrabs.

Abu Gàfar Muhammad ibn Muhammad Nasir al-Din al-Túsi

Nasir al-Din al-Túsi va néixer el 18 de febrer de l'any 1201 a Tús (Khorasan), actualment Iran, i va morir el 26 de juny de 1274 a Kadhimain, durant un viatge a Bagdad.

Als voltants de l'any 1250, quan la ciutat de Kadhimain va ser conquerida pels mongols, Al-Tusi va passar a formar part del cercle de col·laboradors del nou sobirà, Hulegu-Han, i va planificar la construcció d'un observatori a Maragha, al nord-oest de l'Iran.

Aquest observatori va ser inaugurat l'any 1259 i allà va treballar Al-Tusi amb un grup de savis vinguts de Damasc, Mosul, i altres regions i també amb alguns astrònoms xinesos. Tenia un gran equipament i una biblioteca molt rica. Es diu que aquest va ser el millor observatori de l'Edat Mitjana.

Al-Tusi va estudiar jurisprudència, filosofia natural, lògica, metafísica, medicina, àlgebra i geometria. Va treballar sobre el 5è. Postulat d'Euclide*s* en el problema de la teoria de les paral·leles esdevenint un dels precursors de la geometria no euclidiana.

Al-Tusi va escriure *Tractat sobre el quadrilàter complet* (1260) en persa i la va traduir a l'àrab l'any 1260, amb el títol *kitàb-al Sakl al-qatta* (llibre sobre el teorema de la secant) que avui es coneix com *Tractat sobre el quadrilàter complet*.

En aquesta obra Al-Tusi va fer un tractament sistemàtic de la trigonometria plana i, sobretot, esfèrica. És una de les primeres obres on la teoria de resolució de triangles és estudiada de manera independent i no com auxiliar de l'astronomia.

El *Tractat sobre el quadrilàter complet* consta de cinc llibres, el primer amb títol "Sobre les raons compostes i les seves regles en catorze proposicions", tracta de la composició de raons basant-se en els *Elements* d'Euclides; el segon, titulat "Sobre la figura del quadrilàter complet en el pla i les raons que s'hi poden trobar (en onze capítols)", exposa variants del teorema de Menelau per les diferents formes planes del quadrilàter complet que ell mateix defineix. Les demostracions es basen en la composició de raons dels costats de triangles semblants.

El tercer llibre "Preliminars a la figura coneguda amb la denominació de quadrilàter esfèric i del que és necessari per servir-se'n profitosament" consta detres capítols. En el primer capítol dóna una sèrie de nocions preliminars sobre el sinus d'un arc que utilitzarà en el capítol tercer i en el capítol segon hi ha la resolució de triangles que es detallarà més endavant.

En el llibre quart que té per títol "Sobre el quadrilàter esfèric i les raons que s'hi troben" Al-Tusi estudia els quadrilàters esfèrics i demostra les raons entre els costats i els sinus en els quadrilàters formats al tallar arcs de circumferència.

El llibre cinquè titulat "Explicació dels mètodes que fonamenten la figura del quadrilàter en l'estudi dels arcs de cercles màxims que es tallen sobre la superfície d'una esfera" té set capítols. Tracta de la resolució de triangles esfèrics. Primer fa una classificació detallada de deu tipus de triangles esfèrics, segons els seus angles i segons els seus costats. Després demostra el teorema del sinus i el teorema de les tangents i introdueix les nocions de tangent, cotangent, secant i cosecant.

Teorema del sinus

El descobriment del teorema del sinus que relaciona els sinus dels costats i dels angles oposats d'un triangle pla o esfèric va ésser un dels avenços més importants de la trigonometria àrab del siglo X.

Segons Villuendas, la demostració d'aquest teorema neix de la necessitat de simplificar el Teorema de Menelau ja que era laboriós i la seva aplicació no era fàcil.

Sembla que hi ha tres matemàtics que es disputen la seva paternitat:

Abu Mahmud Hamid b. Hadr al-Juyandi (1000 dC), Abu-l-Wafa (940-998) i Abu Nasr (1000 dC) .

Però Villuendas afirma que tots tenen punts de partida diferents i que les les demostracions deuen ser independents.

A remarcar que Al-Tusi no fa primer la demostració en el triangle esfèric sinó que ho fa en el context de resolució de triangles plans.

Al-Tusi en el capítol II del seu llibre explica que hi ha dos mètodes per resoldre els triangles plans: el mètode dels arcs i les cordes i el mètode dels arcs i els sinus.

El primer mètode es basa en què tots els triangles es poden inscriure en un cercle i, per tant, els seus costats es poden considerar cordes. Estudia detalladament tots els casos començant pels triangles rectangles i acabant pels no rectangles encara que no esmenta el cas en què poden haver-hi dues solucions. Així, coneixent les taules de cordes de Ptolemeu, es poden resoldre els triangles plans.

El segon mètode comença amb dues demostracions del teorema del sinus i tot seguit explica com es podria aplicar a triangles rectangles i a triangles no rectangles, encara que no ho fa amb tant detall com en el primer mètode. Per aplicar aquest segon mètode a la resolució de triangles plans cal disposar de les taules de sinus que els àrabs coneixien a través dels *Siddhanta.*

Al-Tusi enuncia el que nosaltres coneixem com a teorema del sinus dient que la relació entre els costats d'un triangle és igual a la relació entre els sinus dels angles oposats a aquests costats. Fa dues demostracions d'aquest enunciat, raonant a partir de construccions geomètriques i distingint entre triangles acutangles i obtusangles en el moment de fer les construccions, encara que les instruccions per fer-les són idèntiques en els dos casos, com també ho són els raonaments que portaran a la conclusió.

Demostració del teorema del sinus. Al-Tusi parteix de dos triangles ABC, un d'obtusangle i un d'acutangle a partir dels quals dóna les instruccions per fer la construcció següent.

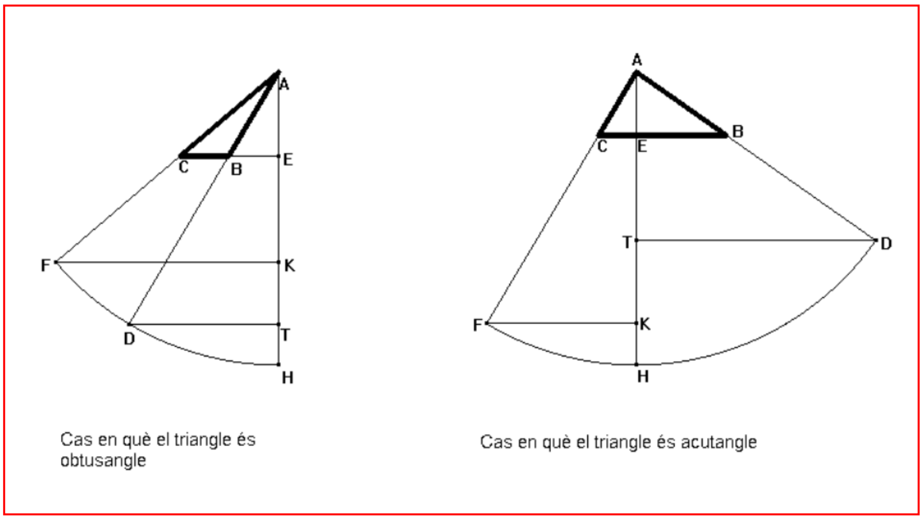


Figura 5. Text i Il·lustracions d'Al-Tusi, Romero, Massa, Casals (2006).

Traça la perpendicular AE a BC; perllonga (els costats) AB i AC fins a obtenir AF=AD=60=R. Descriu l'arc DH (amb centre A i radi AD). Traça FK, DT perpendiculars sobre AH. En el triangle ABE l'angle E és recte, els angles A i B seran complementaris; DT = sin A; AT= sin B. El mateix en el triangle AEC, A + C = arc de la semicircumferència, FK = sin A; KA = sin C.

DT és el sinus del angle BAE i AT el sinus de l'angle ABE. El triangle ACE és rectangle i FK és el sinus de l'angle CAE.Tot seguit Al-Tusi diu que degut al fet que els triangles ABE i ADT són semblants es compleix

(1) $$\boxed{\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{AE}} = \frac{\mathbf{AD\,(radi)}}{\mathbf{AT\,(sinB)}}}$$

De la mateixa manera, com que els triangles AEC i AFK són semblants, obtenim:

(2) $$\boxed{\frac{\mathbf{AE}}{\mathbf{AC}} = \frac{\mathbf{AK\,(sinC)}}{\mathbf{AF\,(radi)}}}$$

.

Demostració

Multiplicant (1) i (2) :

$$\boxed{\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{AE}} \cdot \frac{\mathbf{AE}}{\mathbf{AC}} = \frac{\mathbf{AD\,(radi)}}{\mathbf{AT\,(sinB)}} \cdot \frac{\mathbf{AK\,(sinC)}}{\mathbf{AF\,(radi)}}}$$

I simplificant, obtenim el teorema del sinus $\boxed{\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{AC}} = \frac{\mathbf{sinC}}{\mathbf{sinB}}}$

Al-Tusi , no hi trobem la definició explícita de sinus, però si la relació entre sinus i cordes.

Els dos grans teoremes matemàtics que estan a la base del desenvolupament de la trigonometria àrab van ser el Teorema de Menelau i el Teorema de Ptolemeu que d'alguna manera van ésser ampliats amb el teorema del sinus.

Comentari matemàtic

En aquest sentit, les obres dels àrabs, que arriben a Europa a través de les diferents escoles de traductors al llatí o bé a través de l'obra de Regiomontanus, aporten una millora important en la confecció de les taules trigonomètriques i introdueixen els conceptes de sinus i tangent a Europa.

2.2 Càlcul i mercaderies a la matemàtica medieval

Qui va difondre en el món occidental tots els coneixements de les regles algebraiques dels àrabs va ser Leonardo de Pisa (1180-1250), fill d'un cònsol, anomenat Bonacci, que és conegut amb el nom de Fibonacci.

A la seva obra *Liber abaci* (1202) reflecteix els problemes que va aprendre a calcular a les àlgebres àrabs així com els mètodes de càlcul de la numeració hindú

Leonardo de Pisa (1180-1250)

Conegut a l'època com Leonardo Pisano. Més tard conegut per Fibonacci ja que era un fill de Bonacci que era una mena de consul comercial. Va aprendre a calcular i les tècniques mercantils dels àrabs. Va escriure: *Liber abaci* (1202), *Practica Geometriae* (1220), *Flos* (1225) i *Liber quadratorum* (1225).

Estructura del *Liber abaci*

Capítols 1-7. Nombres hindús-aràbics. Mètodes de càlcul.

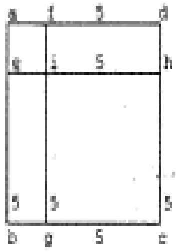
Capítols 8-11. Problemes de mercaders.

Capítols 12 i 13. Problemes recreacions que plantegen equacions.

Capítol 14. Càlcul d'arrels quadrades i cúbiques, i dels binomis.

Capítol 15. Sobre les Regles Geomètriques i sobre els problemes d'àlgebra i al-mucabala.

550 II. Liber Abaci (1202) Leonardo de Pisa (1170-1250)



39. Therefore half of the number of roots is 5; this multiplied by itself makes 25 which added to the 39 makes [p408] 64; the root of it is 8; if half of the number of roots, namely 5, is subtracted from the 8, then there will remain 3 for the root of the sought census. Therefore the census is 9, and the ten roots are 30, and thus the census plus the ten roots is equal to 39. I shall manage to show how this rule works using two figures; indeed a square .abcd. is taken having each side greater than 5 cubits, and the point .e. is taken on the side .ab., the point .f. on the side .ad., the point .g. on the side .bc., and the point .h. on the side .cd.; and let each line segment .be., .cg., .ch., and .df. be 5 cubits, and connect the line segments .eh. and .fg.; and because the rectangle .ac. is a square the line segment .da. will be equal to the line segment .ba.; and when equals are subtracted from equals, then those which remain are equal; therefore if from .da. is subtracted .df., and from .ba. is subtracted .be., because each is 5, the line segment .ea. will remain equal to the line segment .fa.; but the line segment .ae. is equal to the line segment .fi., as the line segment .fg. is equal to the line segment .ab.; indeed the line segment .ig. is equal to the line segment .eb., and for the same reason the line segment .ei. is therefore equal to the line segment .af., as the line segment .eh. is equal to the line segment .ad., and the line segment .ih. is equal to the line segment .fd.; therefore the rectangles .ef. and .gh. are squares; I shall therefore put for the sought census the square .ef. which has unknown side; the root of the census is each of the line segments .ei. and .if.; but the line segment .ei. multiplied by the line segment .ig. is the area of the rectangle .bi., that is the five roots of the census .ef., and similarly the area of the rectangle .id. constitutes 5 roots of the census .ef.; but the census plus 10 roots is equal to 39 denari; therefore the aforesaid three areas .ef., .bi., and .id. total 39; therefore if 25 is added to it, namely the square .gh., each side of which is 5, then 64 is had for the entire square .abcd.; the root of this, namely 8, is the length of each side of the square; therefore if the line segment .be. is subtracted from the line segment .ba., namely the 5 from the 8, then there will remain 3 for the line segment .ea.; therefore the root of the sought census is 3, and the census is 9; this added to ten of its roots makes 39, as must be.

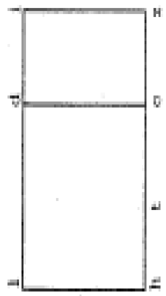


Figura 6. Solució retòrica i geomètrica d'una equació a Fibonacci, Sigler, 2002.

Problema pràctic. Divideixo 60 entre un nombre d'homes i cadascun rep quelcom, i afegeixo dos homes i entre tots aquets torno a dividir 60 i cadascú rep 2 ½ dinars menys que abans. Veiem com ho solucionava com exercici pràctic, Sigler, p. 562.

Després de Fibonacci

L'època menys coneguda del desenvolupament de les equacions algebraiques correspon als segles XIII i XIV, en què floriren les matemàtiques comercials amb les obres que avui anomenem aritmètiques mercantils.

A Itàlia, i més concretament, Florència i Venècia, importants capitals comercials, van aparèixer moltes d'aquestes aritmètiques mercantils.

El Mediterrani és l'escenari del gran comerç amb Orient i entre Itàlia i Àfrica del Nord.

Matemàtica mercantil

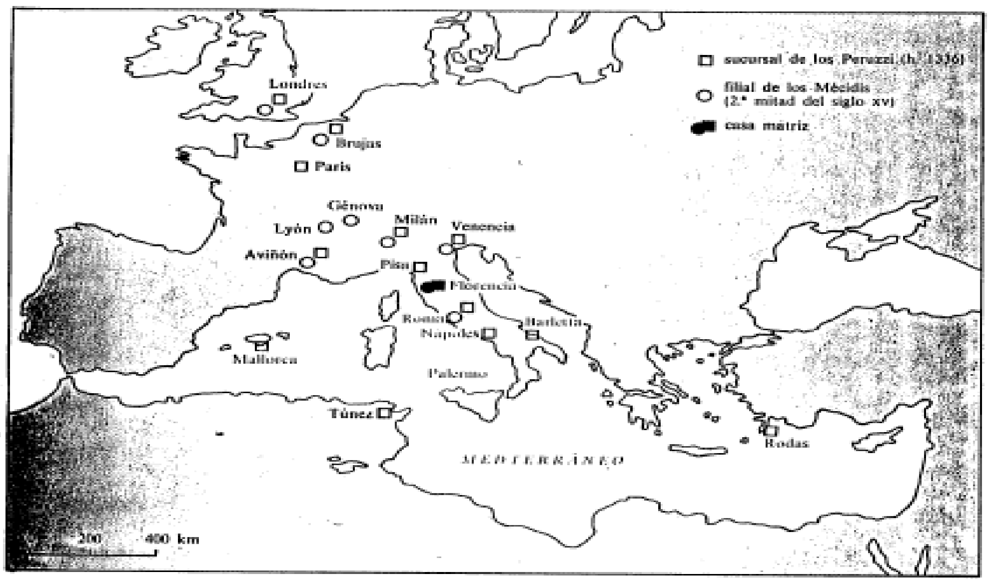
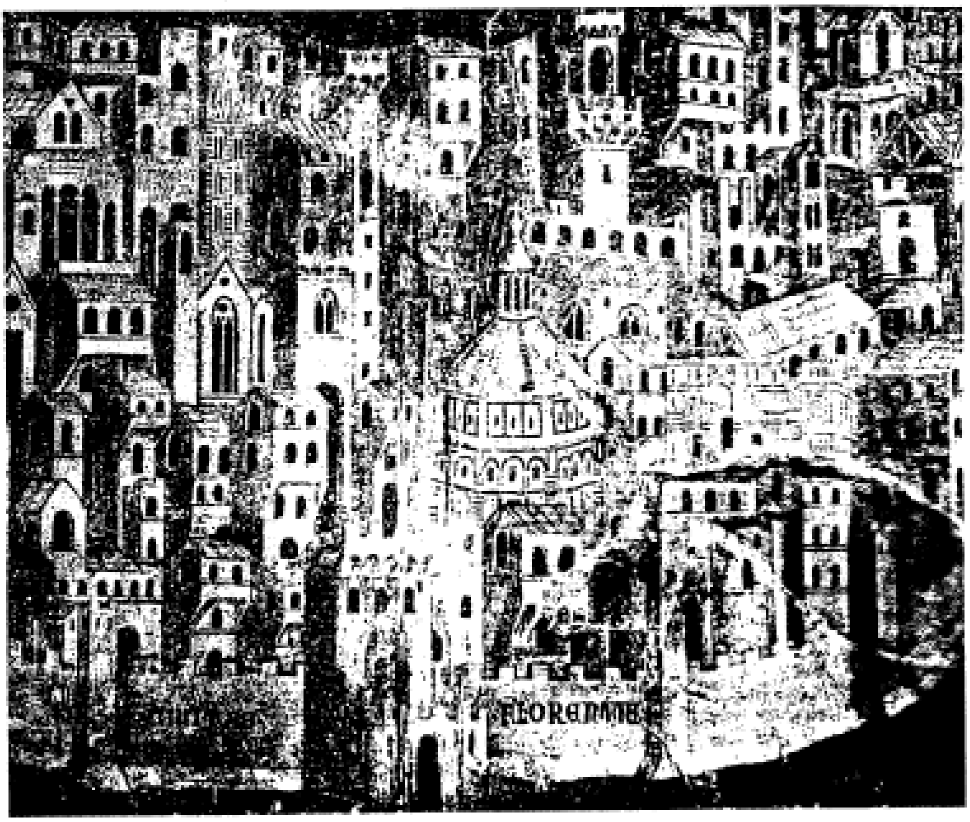


Figura 7. Mapa del segle XV-XVI on es destaquen les ciutats del comerç, Serres, 1981.

Comença a fer falta saber comptar, repartir beneficis i es creen companyies (petites empreses) a Florència i a Venècia. També es creen les lletres de canvi com document per comerciar.



Florencia en el siglo XVI. La ciudad está rodeada de murallas. La concentración de la población se refleja en la elevación de las casas y la riqueza de la ciudad en la importancia de las construcciones de piedra. La catedral actual aún no está construida, pero podemos reconocer el Baptisterio, a la derecha de la puerta del recinto.

Una letra de cambio

«En el nombre de Dios, el 18 de diciembre de 1399, pagaréis por esta última letra al vencimiento, a Brunacio di Guido y Cia. CCCCLXXII libras X sueldos de Barcelona, las cuales 472 libras 10 sueldos que valen 900 escudos a 10 sueldos 6 dineros por escudo me han sido pagados aquí por Ricardo degl'Alberti y Cia. Pagadlas en buena y debida forma y ponedlas a mi cuenta. Que Dios os guarde. Ghuiglielmo Barbieri. Salud de Brujas.» (en J. Le Goff, 1986).

El vencimiento era el plazo habitual de cobro de una letra de cambio de un lugar a otro. De Brujas a Barcelona el vencimiento era, en el siglo XV, de treinta días. Una letra de cambio como ésta cubría operaciones de cambio, de transferencia y de crédito. Se convirtió en uno de los instrumentos esenciales del comercio italiano a finales de la Edad Media.

Figura 8. Lletra de canvi i vista de Florència en el segle XVI, Malet-Paradís, 1984.

Els mestres d'àbac (no ensenyen manuals d'ús de l'àbac) eren homes amb rendes superiors als artesans i eren molt ben considerats. A les escoles d'àbac apart d'ensenyar a llegir, s'ensenyava el que és útil pel comerç o sigui el càlcul mercantil. Les escoles florentines són les que més es coneixen i eren gairebé totes privades.

Figura 9. Aritmètica Mercantil. Pintura sobre pergamí datada del segle XV, Manresa inventariat nº MCM 1670.

Hi ha moltes aritmètiques mercantils en el període 1300-1500, de les quals més de tres-centes en manuscrits italians i només trenta en francesos. L'aparició de la impremta a meitats del segle XV va ajudar a la seva difusió.

Estaven escrites normalment en llengua vulgar (no en llatí) i alguns historiadors consideren que molts comerciants les tenien a les prestatgeries perquè donaven prestigi.

La producció matemàtica, d'una certa matemàtica almenys, va quedar així lligada a les ciutats més riques i econòmicament desenvolupades, les d'Alemanya i les del Nord d'Itàlia, ciutats on treballaren els autors més importants d'aquest període. El següent quadre cronològic dóna idea de les edicions de les principals obres i de llur localització:

ANY	CIUTAT	AUTOR	LLIBRE	NACIÓ
1478	Treviso	Anònim	Tractat d'aritmètica	ITALIA
1482	Bamberg	Ulrico Wagner	Llibre de càlculs	ALEMANYA
1482	Barcelona	Francesc Sanctcliment	Suma de la art de Arismetica	CATALUNYA
1484	Venezia	Pietro Borgi	Arithmetica	ITALIA
1484	Lyon	Nicolas Chuquet	Le Triparty en la science des nombres	FRANÇA
1489	Leipzig	J. Widman	Tractat de càlcul	ALEMANYA
1490	Florença	F. Calandri	Aritmetica	ITALIA
1494	Venezia	Luca Pacioli	Summa de arithmetica	ITALIA

Figura 10. Primeres publicacions matemàtiques (Malet-Paradís, 1984)

Les aritmètiques mercantils constaven d'una part teòrica: nombres, operacions, regla de tres, regla de falsa posició,...i d'una part pràctica: problemes de barates, impostos, aliatges, correus, companyies, monedes,...

Les definicions eren utilitàries i sense demostracions. Algunes incloïen un darrer bloc d'àlgebra i altres no, de fet no s'hi resolen casos nous però ajuden a la difusió de les regles algebraiques àrabs.

El saber d'aquestes aritmètiques mercantils i de les fonts orientals usades pels mercaders italians es recullen en l'obra enciclopèdica de Luca Pacioli (1447-1517) titulada *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni & Proportionalità* (Venecia, 1494) que va tenir gran difusió a la seva època.

2.3 El Renaixement.

El període comprés entre mitjans del segle XIV i els començaments del XVII va ser l'època del Renaixement, així anomenada pel ressorgir o renàixer de l'interès per la Grècia i la Roma de l'Antiguitat clàssica.

El llatí i el grec eren les claus indispensables per l'estil, els coneixements i el bon gust i van assumir un significat fonamental en l'educació que es conservarien durant segles.

Moviment dels sègles XV i XVI en els quals es va produir un renaixement de la cultura clàssica, el desenvolupament i l'aparició d'una nova visió de vida centrada en l' home.

Va ser també el període dels grans viatges de descobriment que van ampliar els horitzons de la civilització occidental. Les riqueses del Nou Món van ajudar a desenvolupar les de ja per si creixents economies europees.

La influència més gran del Renaixement en la tecnologia es va registrar en l'arquitectura. L'abandó de les formes gòtiques per l'arquitecte italià Leon Battista Alberti (1404-1472) i els seus successors i la gradual difusió de l'estil neoclàssic palatí en l'edificació, des d'Itàlia fins a tota Europa, va implicar canvis en la tècnica de la construcció.

Els arquitectes i paletes que van portar a terme els seus projectes van haver d'aprendre com construir grans cúpules catedralícies tals com la de Sant Pere de Roma, que Europa no havia vist mai anteriorment.

El Renaixement va alenar a artistes i artesans (orfebres com Cellini, pintors com Rafael) i a la vegada va modificar els objectius de les seves activitats

L' Itàlia renaixentista del segle XVI, època molt rica culturalment, és l'època de Leonardo de Vinci, Miquel Angel, Botticelli, Alberti i molts altres.

També és l'època en què es comencen a recuperar textos grecs i es tradueixen al llatí. A tall d'exemple podríem citar Frederico Commandino (1506-1575) que tradueix les grans obres clàssiques d'Arquimedes, Ptolemeu, Euclides, Aristarc, etc....

Es produeix la normalització dels caracters numèrics hindus. Encara l'àlgebra no és considerada una part independent dins de les matemàtiques.

Girolamo Cardano (Pavía 1501 - Roma 1576)

Fill de Fazio Cardano (advocat milanès).Als 19 anys estudia medicina a la Universidad de Pavia. Als 26 anys aconsegueix el grau de doctor de medicina. L'any 1529 es casa amb Lucia Bandareni amb la que té tres fills.

Del 1552 al 1559 viatja a Escòcia on la seva reputació com a metge es consolidarà. 1560 mor un dels seus fills a Pavia. El 1570 va ser empresonat per la Inquisició per haver dit que els esdeveniments de la vida de Jesús eren deguts a l'influencia dels estels. El 1571 torna a Roma i escriu la seva biografia.

Figura 11. Girolamo Cardano. Google Imatges.

Deia Cardano d'ell mateix: ***"He recibido de la Naturaleza un espíritu filosófico e inclinado a la Ciencia. Soy ingenioso, amable, elegante, voluptuoso, alegre, piadoso, amigo de la verdad, apasionado por la meditación, y estoy dotado de talento inventiva y lleno de doctrina. Me entusiasman los conocimientos médicos y adoro lo maravilloso. Astuto, investigador y satírico, cultivo las artes ocultas. Sobrio, laborioso, aplicado, detractor de la religión,***

vengativo, envidioso, triste, pérfido y mago, sufro mil contrariedades. Lascivo, misántropo, dotado de facultades adivinatorias, celoso, calumniador e inconstante, contemplo el contraste entre mi naturaleza y mis costumbres."
Girolamo Cardano (De propia vita)

Llibres escrits per Cardano de temàtica matemàtica:

Practica Arithmetica (1539); *Artis Magnae sive de Regulis Algebraicis* (1545); *Liber de ludo aleae* (pub. 1663).

Orígens simbolisme. Escola italiana

Luca Pacioli (1447-1517) Lucas de Burgo

Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni & Proportionalità (1494)

Girolamo Cardano (1501-1576)

Artis Magnae sive de Regulis Algebraicis (1545)

Notació: "p", "m", R., co. ce. cu.

Característiques de l'àlgebra a l'època

1) Procés de maduració dels mètodes algebraics, com eines per a la resolució general de problemes. (Regles més generals).

2) Algebrització dels problemes clàssics de geometria plana.

3) Perspectiva d'emprar l'àlgebra no per resoldre problemes específics sinó universals. (Propostes de resolució de problemes)

Tartaglia i Cardano

Dins de l'evolució de l'àlgebra cal assenyalar, per exemple, Niccolo Tartaglia (1499-1557) amb l'obra *Quesiti et inventioni diverse* (1546), Girolamo Cardano (1501-1576) amb la seva obra *Artis Magnae sive de Regulis Algebraicis* (1545). Aquests, entre d'altres algebristes del *cinquecento*, van començar a resoldre cúbiques, biquadrades...i van fer noves classificacions d'equacions.

És interessant subratllar que ja Cardano en la seva obra estudiava les equacions algebraiques de manera sistemàtica i tractava la teoria d'equacions com una branca diferenciada dins les matemàtiques intentant donar regles generals i trobant totes les solucions.

A l'aula treballarem la traducció anglesa de l'*Ars Magna* de Cardano, obra fonamental per entendre l'evolució de l'àlgebra. També es mostrarà la classificació de equacions de grau més gran que dos feta per Cardano i es resoldrà, en concret l'equació de tercer grau, amb la seva justificació geomètrica.

Niccolo Fontana (Brescia, 1499 – Venecia, 1557)

Figura 12. Nicolo Fontana. Google Imatges.

Unes ferides provocades en la seva infantessa marquen la seva vida, deixant-lo tartamud. Autodidacte, escrivia en llengua vernacle.

Escriu les obres: *Nova Scientia; Quesiti o inventioni diverse; General trattato di numeri et misure.*

ORIGEN **De la solució de l'equació de tercer grau**

El 1494, Luca Pacioli publica *Summa Arithmética* en la que comenta que els matemàtics no eren capaços de resoldre les equacions cubiques per mètodes algebraics.

Scipione del Ferro troba la solució general de l'equació cubica del tipus: $x^3 + nx = h$

Tartaglia troba la solució general de l'equació tipus:

$$x^3 + mx^2 = h$$

ORIGEN **De la solució de l'equació de tercer grau**

A l'any 1539 Cardano contacta amb Tartaglia amb la intenció de conèixer els estudis d'aquest últim en relació a la solució de l'equació de tercer grau.

"Os juro sobre los Santos Evangelios que si me

comunicáis vuestros conocimientos no los

publicaré jamás y los anotaré sólo para mí en cifra,

a fin de que nadie pueda comprenderlos hasta

después de mi muerte " Promesa de Girolamo Cardano a Niccolo Tartaglia

El 1545 Cardano publica la seva famosa *Artis Magnae*

Artis Magnae (1545)

Té 40 capítols: Els quatre primers són de caràcter general. Capítol V dedicat a les equacions de segon grau. Capítol VI. Preparació per les cúbiques. Capítol VII. Transformació de les equacions. Capítol VIII. Solució d'un tipus especial d'equacions. Capítols IX i X. Sistemes de dues equacions amb dues incògnites. Capítols XI al XXIII. Les solucions d'una cúbica. Capítols XXIV-XXVIII. Noves equacions i regles imperfectes. Capítols XXIX-XXXVIII-Problemes pràctics d'aplicació. Capítol XXXIX –Biquadrades (Ludovico Ferrari). Capítol XL- Diverses proposicions.


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib.unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inſcripſit,eſt in ordine Decimus.

Habes in hoc libro, ſtudioſe Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Coſſa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonſtrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam ſeptuaginta euaſerint. Neq; ſolum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aût librum ideo ſeorſim edere placuit, ut hoc abſtruſiſſimo, & planè inexhauſto totius Arithmeticæ theſauro in lucem eruto, & quaſi in theatro quodam omnibus ad ſpectandum expoſito, Lectores incitarētur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore faſtidio perdiſcant.

Figura 13. Portada de l'obra. Google Imatges.

L'equació de Tartaglia-Cardano

- La regla que soluciona les equacions del tipus ; b,c>0; (es recorda que tenen només una solució i positiva), es: $x^3+bx=c$
- $$\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3+\left(\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{c}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3+\left(\frac{c}{2}\right)^2}-\frac{c}{2}}=x$$

Com exemple d'aplicació d'aquesta expressió provem amb $x^3+6x=20$

; si s'empra l'expressió anterior, resulta que

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}=2$$

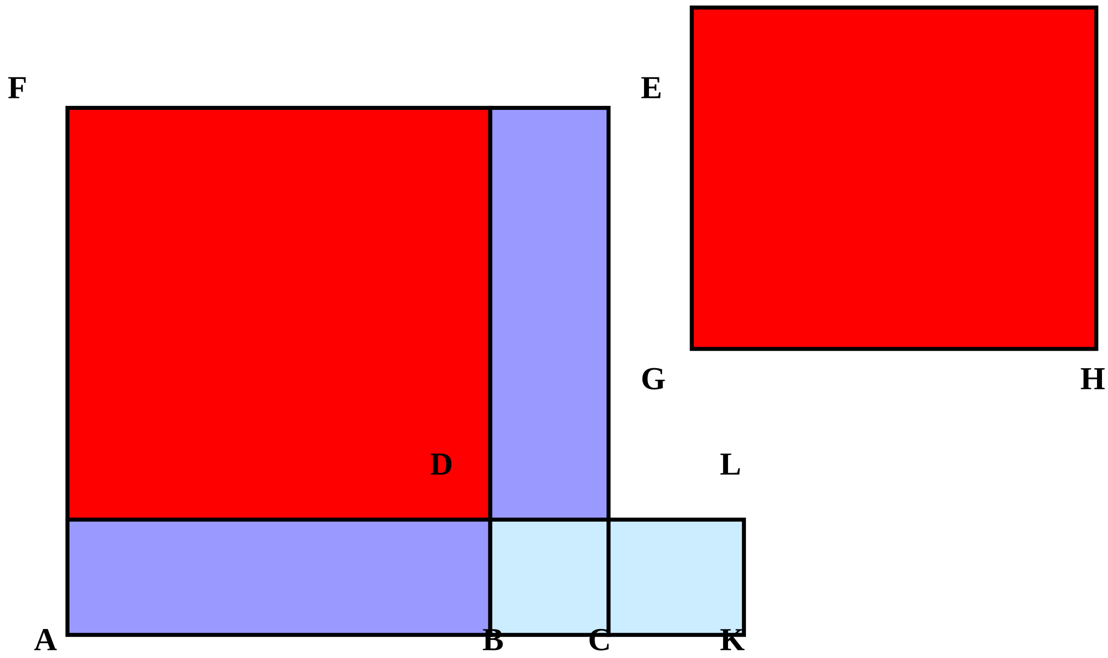
.

Demostració

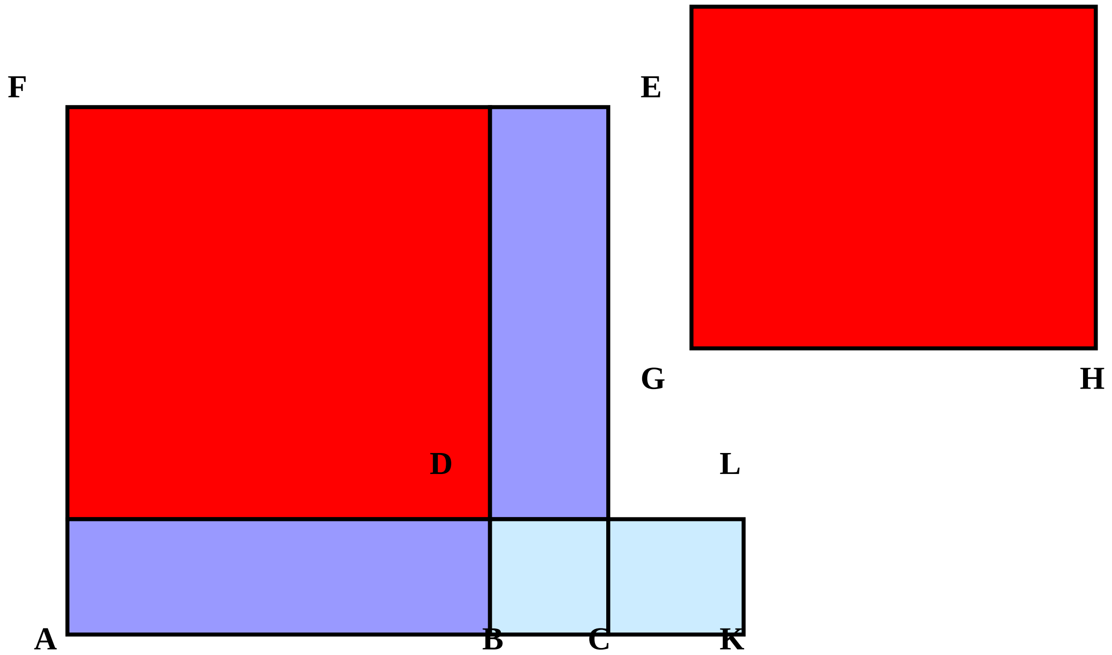
- Assumir que una de les arrels (la única des del punt de vista de Cardano), és del tipus $x = u - v$
- ; s'obté $3uv = b$
- S'imposa la condició addicional $u^3 - v^3 = c$, $uv = b/3$ resulta el sistema de equacions
- $u^3 - v^3 + (u-v)\cdot(b - 3uv) = c$
- Mitjançant el canvi de variable $z = u^3$, resulta l'equació quadrada; $z^2 - cz - (b/3)^3 = 0$
-
- $$\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} + \frac{c}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} - \frac{c}{2}} = x$$
- I la fórmula que volíem demostrar.

Estudi d'un problema particular

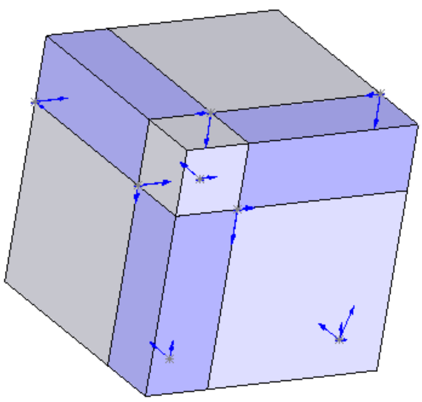
Cardano relaciona l' estudi de l'equació: $GH^3 + 6GH = 20$ amb una construcció de cossos volumètrics.



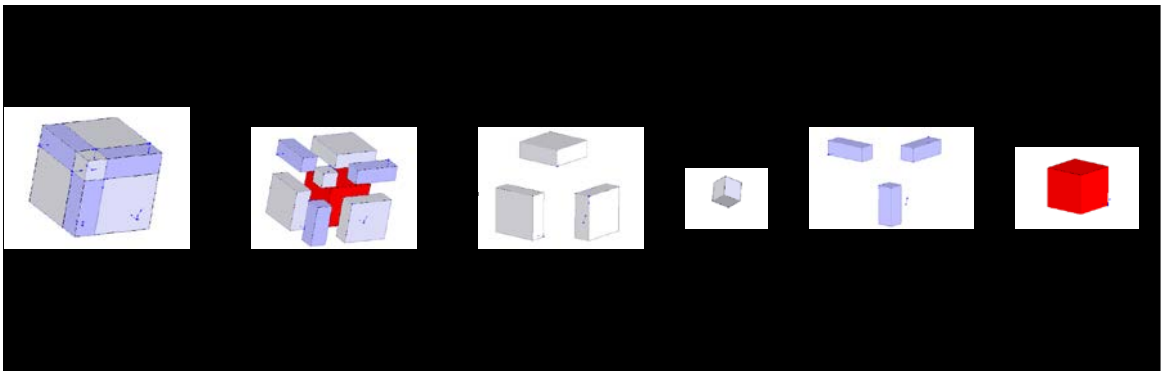
1) Un cub anomenat AE i l'altre CL que compleixen que el volum del primer restat al del segon tenen un valor de 20 unitats.



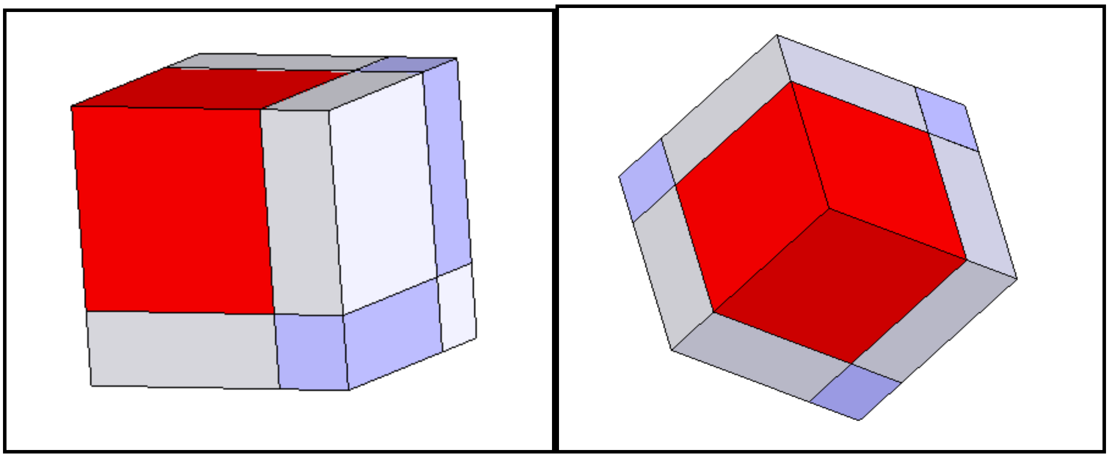
Estudi d'un problema particular



Estudi d'un problema particular

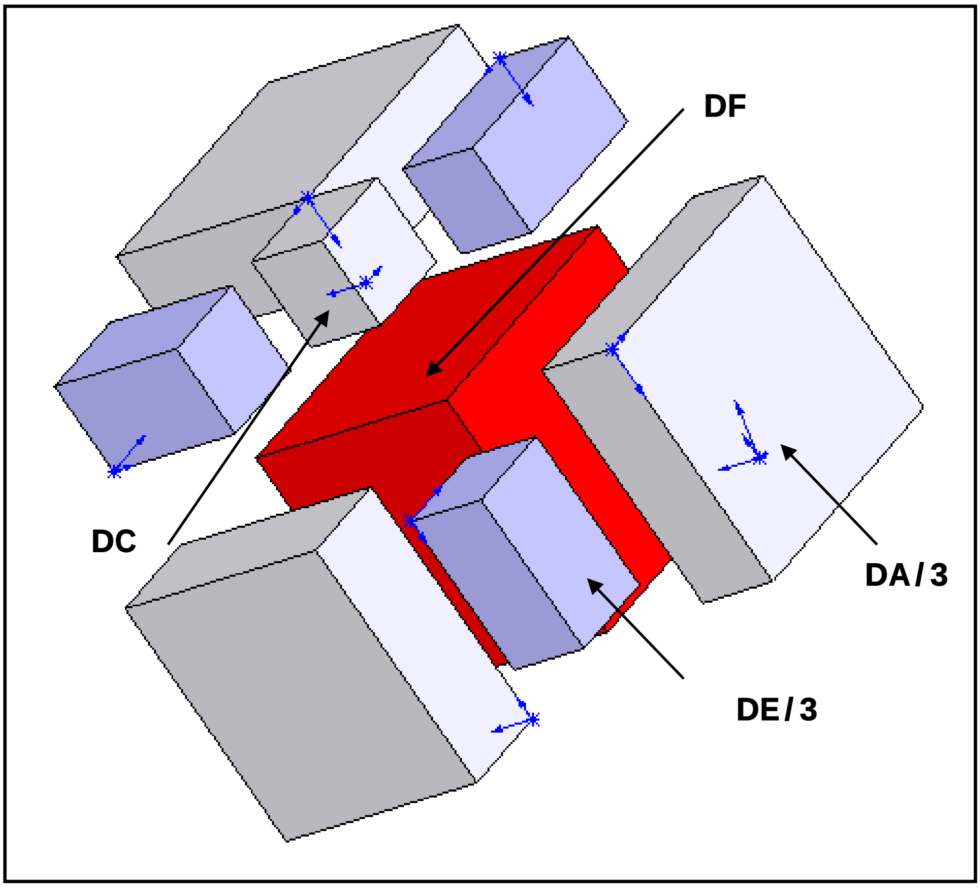


Estudi d'un problema particular



$$AC^3 = (AB + BC)^3 = AB^3 + 3\times AB^2 \times BC + 3\times AB \times BC^2 + BC^3$$

$$AC^3 - BC^3 = AB^3 + 3\times AB^2 \times BC + 3\times AB \times BC^2$$


DF
DC
DA / 3
DE / 3

Comentari matemàtic

Obra diferent en quasi tots els aspectes. Regles generals no resoldre casos particulars. Intent de classificació de les equacions. No tracta d'operacions amb nombres ni arrels, ni regles de chèber i mucabala. Dóna demostracions geomètriques. Llibre difícil per a qui no estigui familiaritzat. Poc clar en les explicacions. Dóna la sensació que comença cada cas de nou. La classificació no apareix lligada a problemes pràctics de la vida real (problemes blancs).Planteja els problemes intentant buscar totes les solucions.

Obra perspectives en l'àlgebra que semblava estancada i intenta augmentar el grau per resoldre equacions, apareixent irracionals i operant amb ells.

Bibliografia Tema 2

AL-KHWARIZMI, article al D. S. B., 358-365.

ANDOUBA, A., "L'algèbre arabe aux IX et X siècles. Aperçu general", *Journal for the History of Arabic Science,* 2, 1, pp. 66-100.

BENOIT-MICHEAU, " ¿El intermediario árabe?", dins de *Historia de las ciencias*, M. Serres (ed), Madrid: Cátedra, 1991, pp. 175-201.

CARDANO, G., article al D. S. B., 64-67.

CARDANO, G., *The Great Art or the Rules of Algebra,* Witmer, T. Richard (ed., trans.), Cambridge, Mass., & London: M. I. I. Press, 1968, pp. 7-22, 217-221, 96-101.

CATALA, M. A., "El nacimiento del álgebra", dins de *Historia de la ciencia àrabe*, J. Vernet (ed), Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid, 1981, 23-37.

CIFOLETTI, Giovanna C., *La méthode de Fermat: son statut et sa difussion*, Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, nouvelle série, 33, Paris, Société française d'histoire des sciences et des techniques, 1990.

CIFOLETTI, Giovanna C., "The creation of the history of Algebra in the sixteenth century". A: GOLDSTEIN, C., GRAY, J., RITTER, J. (ed.), *L'Europe mathématique. Histoires, Mythes, Identités,* Paris, Éditions de la Maison des sciences de l'homme, 1996, 121-142.

DJEBBAR AHMED, *Une histoire de la science arabe. Introduction à la connaissance du patrimoine scientifique des pays d'Islam,* Seuil, 2001, 201-239.

EGMOND, W. V.,"How Algebra came to France", *Mathematics from manuscript to print,* Hay, Cynthia, ed., Oxford, 1988, 127-144.

FRANCI, Raffaella –TOTI RIGATELLI, Laura., "Towards a history of Algebra from Leonardo of Pisa to Luca Pacioli", *Janus: Revue Internationale de l'Histoire des Sciences, de la médecine, de la pharmacie et de la technique,* LXXII, 1-3, 1985, 17-82.

FRANCI Raffaella -TOTI RIGATELLI, Laura., "Maestro Benedetto da Firenze e la Storia dell'Algebra", *Historia Mathematica*, 10, 1983, 297-317.

GONZÁLEZ, A.; SOLER, A. *Cardano. Llibre dels jocs d'atzar. Antologia mínima*. Grup de Filosofia. Santa Coloma de Gramenet, Casal del mestre, 1998.

HAY, Cynthia (ed.), *Mathematics from Manuscript to Print: 1300-1600,* Clarendon Press Oxford, 1988.

MALET-PARADIS, *Els origens i l'ensenyament de l'àlgebra simbòlica,* Edicions Universitat Barcelona, Barcelona, 1984, pp. 13-27 i 303-305.

MASSA-ESTEVE, M. R. "Les equacions de segon grau al llarg de la història", *Biaix,* 2005.

MASSA-ESTEVE, M. R. “Spanish Arte Mayor in the sixteenth century”A: Rommevaux, S., Spiesser, M. I Massa-Esteve, M. R. (eds) *Pluralité de l’Algèbre à la Renaissance,* Paris Champions, 2012.

MOHAMED BEN MUSA AL-KHWARIZMI, *The Algebra,* Rosen (ed. i trad.), 1986, Londres, Olms.

NAVARRO Victor i al., *Bibliographia physico-mathematica hispanica (1475-1900)*, Vol.I. Libros y folletos, 1475-1600, Valencia, Universidad de Valencia-CSIC, 1999.

PACIOLI, Luca,*Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni & Proportionalità,*Venecia, Paganino de Paganini, 1494.

RASHED, R.,*The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra*, V. 26, Boston Studies in the Philosophy of Science, Kluwer Academic Publishers, 1994, 56-61.

RASHED, R., "L'algèbre" dins de *Histoire des sciences arabes 2. Mathématiques et physique*, Seuil: Paris, 1997, 31-54.

ROMERO, F. & MASSA-ESTEVE, M. R. & CASALS, M. A., “La trigonometria en el món àrab. *Tractat sobre el Quadrilàter complet* de Nasir al-din al-tusi (1201-1274)”,*Actes de la VIII Trobada d’Història de la Ciència i de la Tècnica*, 2006, 569-575.

SALAVERT FABIANI, Vicent, “Aritmética y sociedad en la España del siglo XVI”, A: GARMA, S., FLAMENT, D., NAVARRO, V., (ed.) *Contra los titanes de la rutina*. Encuentro, en Madrid, de investigadores hispano-franceses sobre la historia y la filosofía de la matemática. Madrid, CSIC, 1994, 51-69.

SESIANO, J., "The appearance of negative solutions in Mediaeval Mathematics", *Archive for History of Exact Sciences*, 32 (1985), 105-150.

SIGLER, Laurence E., (trad.), *Fibonacci's Liber Abaci, A translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*, Nova York: Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, Springer, 2002.

VERNET, J. «La originalidad de la ciencia árabe», A: Vernet, J. (ed.) *Historia de la ciencia àrabe*, 1981. Madrid, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 3-21.

VILLUENDAS, M. V. "El origen de la trigonometria", A: Vernet, J. (ed.) *Historia de la ciencia árabe*, 1981. Madrid, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 39-62.

YOUSCHKEVITCH,A. P., *Les Mathématiques Arabes (VIII-XV s.)* Paris, 1976.

Tema 3. El naixement de la matemàtica moderna

3.1 L'algebrització de les matemàtiques

Tot i que en les primeres àlgebres renaixentistes ja es pot apreciar un procés inicial de maduració dels procediments algebraics, no va ser fins el segle disset que van tenir lloc els passos més decisius per a l'algebrització de les matemàtiques.

Una de les principals novetats matemàtiques en aquest segle és el procés de l'articulació de l'àlgebra i la geometria. Aquest procés que va donar origen a dues noves branques de la matemàtica que avui coneixem amb els noms de càlcul infinitesimal i geometria analítica.

Les dues noves parts de la matemàtica van obtenir el seu excepcional poder de l'establiment de correspondències entre fórmules i figures, entre càlculs simbòlics algebraics i operacions geomètriques i construccions.

A finals del segle XVII, el llenguatge i procediments algebraics van anar adquirint una posició hegemònica dins de les matemàtiques que ja no van perdre posteriorment.

Segons Bos: "El període, els protagonistes i el procés havien rebut poca atenció per part dels historiadors de la matemàtica, però en els últims anys existeix una línia d'investigació on s'intenta entendre el procés en el seu propi context, en termes de coneixement matemàtic i de les intencions amb què es treballava més que en termes del que succeirà després." Aquestes paraules de Bos i les idees que remarquem representen un resum del simposi al que vaig assistir el 1993 al *XIXth International Congress of History of Science* a Saragossa titulat: *Algebra and Geometry around 1600.* Ens podríem preguntar: ¿Quins canvis conceptuals van contribuir al fet que es produís l'algebrització de les matemàtiques? ¿Perquè va passar precisament a principi del segle disset? ¿Quina era la situació pel que fa als fonaments de la matemàtica?

Ha estat suggerit que aquest fet hauria estat conseqüència dels desenvolupaments paral·lels i complementaris de la mecànica racional i del càlcul infinitesimal. Tanmateix, estudis més recents mostren una història més complexa en la qual incideixen factors religiosos i filosòfics.

L'aparició d'*In artem analyticem isagoge* (1591) de François Viète (1540-1603) va fer palès l'avantatge d'utilitzar símbols dins la matemàtica, no només per representar la incògnita, sinó també per les quantitats conegudes i d'aquesta manera es podia treballar amb equacions en forma general. Viète va posar també en connexió l'àlgebra i la geometria determinant les equacions que corresponen a diverses construccions geomètriques. En la fusió de l'àlgebra i la geometria en el pensament del segle XVII podem distingir molts punts d'anàlisi: la recerca de nous mètodes analítics recreats amb els mètodes dels antics; les línies divisòries que estaven en moviment, pel que fa a terminologia i metodologia, de l'aritmètica, l'àlgebra, l'anàlisi i la geometria; la introducció i l'augment de mètodes algebraics en altres camps com ara la teoria de nombres; la logística *especiosa* com un llenguatge nou de símbols i tècniques; els obstacles de la compatibilitat de l'àlgebra i la geometria; les diverses solucions dels matemàtics a aquests problemes, etc. Existeix, per tant, un important i ampli debat historiogràfic internacional sobre aquest tema.

Així, un dels punts crucials va ser l'ús de l'àlgebra "nova" de Viète, amb un nou llenguatge simbòlic, no només com a mitjà d'expressió sinó com a eina analítica. És a dir, s'operava i es construïen nous "objectes" algebraics que permetien trobar nous resultats, com ara quadratures, màxims, series o equacions.

Més tard, Descartes i Fermat en introduir aquest llenguatge algebraic a la geometria van canviar totalment el tractament de la geometria. Es va anar introduint dins la matemàtica el pensament algebraic que no era tan intuïtiu com el geomètric, euclidià, però que permetia generalitzar i treballar amb objectes matemàtics, encara que no tinguessin representació geomètrica.

Caldria reflexionar sobre l'evolució d'aquesta nova part de les matemàtiques, l'àlgebra, després de Descartes i Fermat. La realitat és que, malgrat les controvèrsies i debats, en un segle més o menys es va produir el que actualment s'anomena l'"algebrització de les matemàtiques", o sigui la utilització de l'àlgebra a la geometria.

La introducció dels procediments algebraics dins la geometria va obligar a un replantejament dels límits disciplinaris de les ciències matemàtiques a nivell terminològic i, sobretot, a nivell metodològic, que es va traduir en un establiment de noves línies divisòries entre les diferents branques de la matemàtica. Encara que no s'aprecia una ruptura clara, podem concloure que en el termini de gairebé un segle, l'àlgebra va acabar per imposar-se com una part útil de les matemàtiques, que permetia resoldre problemes que d'altra manera era impossible solucionar.

Aquest procés d'algebrització de les matemàtiques no va ser lineal ni en el temps ni en l'espai, ja que no va ser el mateix ni dins de cada país ni dins de cada comunitat de científics. Els grans difusors i investigadors d'aquest "art analític", amb un llenguatge i mètodes nous, defensaven l'àlgebra com una part de la matemàtica davant dels que la ignoraven o l'atacaven considerant el seu ús una pèrdua de temps i una complicació. Així, per exemple, Thomas Hobbes (1588-1679) en la seva obra *Examinatio* (1660) trivialitzava l`estil simbòlic i condemnava universalment la nova àlgebra. La geometria i la seva subordinada l'aritmètica eren en la seva opinió ciències, mentre que l'àlgebra no ho era, sinó que la considerava un raonament simbòlic, un art per registrar amb brevetat i celeritat les invencions de la geometria. La posició d'Isaac Barrow (1630-1677) també era contraria a l'àlgebra, ja que considerava l'aritmètica una part de la geometria, que era l'única ciència per excel·lència, i l'àlgebra, un instrument de lògica. John Wallis (1616 - 1703), en canvi, no únicament va utilitzar l'àlgebra en les seves obres, sinó que va escriure un tractat, *Treatise on Algebra* (1685), sobre aquesta nova part de les matemàtiques presentant-ne un recorregut històric i les contribucions algebraiques de Thomas Harriot (1560-1621) i d'altres.

3.2 L'Art Analític de François Viète (1540-1603)

L'any 1591, amb l'aparició de l'obra *In artem analyticem isagoge* de François Viète (1540-1603) es va fer palès l'avantatge d'utilitzar símbols dins la matemàtica, no només per representar la incògnita, sinó també per les quantitats conegudes, de manera que es podia treballar amb equacions en forma general ($ax^2 + bx + c = 0$).

Viète va introduir l'àlgebra "nova", emprant la que va anomenar "logistica especiosa", o sigui, càlculs amb "espècies", en front de la "logistica numerosa", o sigui, càlculs amb nombres que ja es desenvolupava a les àlgebres renaixentistes anteriors.

El sistema de Viète era un mètode de càlcul d'espècies, tipus o classes d'elements més que de càlculs directes amb cada element. Les espècies de l'àlgebra de Viète eren tot tipus de magnituds, numèriques com ara els nombres naturals i racionals, però també geomètriques com ara les longituds, les àrees, els volums o els angles.

L'obra de Viète va tenir una gran difusió i a principis del segle XVII, un bon nombre de matemàtics van començar a adonar-se que els procediments algebraics eren una eina molt útil per resoldre problemes geomètrics.

Viète va intentar explicar el camí que emprava per resoldre les equacions emmarcant-lo dins l'anàlisi grega. L'objectiu del seu "art analític" era proporcionar un mètode per a resoldre tots els problemes mitjançant tres processos. El primer consistia en transformar el problema en una equació composta de quantitats conegudes i desconegudes (zetètica). El segon en provar els teoremes coneguts a partir de l'equació plantejada (porística). En l'últim procés, que era el més important per Viète, s'estudiava l'estructura de les equacions plantejades per a poder trobar la solució (exegètica). Així resumia Viète aquestes idees al final de la seva obra:

> *Finalment, l'art analític, dotat de les seves tres formes zetètica, porística i exegètica, reclama per a ell mateix la solució del problema més gran de tots que és SOLUCIONAR TOTS ELS PROBLEMES* (Viète, 1970 : 12).

Una de les característiques més importants de l'obra de Viète és que va identificar les equacions algebraiques amb les proporcions mitjançant el producte de mitjos i extrems d'una proporció. Així, va utilitzar la teoria de proporcions d'Euclides per a resoldre les equacions introduint un nou camí per solucionar-les.

L'àlgebra de Viète va ser la guia per a resoldre equacions a l'aritmètica, a la geometria, a la trigonometria,... Amb Viète les expressions algebraiques esdevenen modernes, en el sentit que el rigor i la generalitat amb què són emprades són similars als actuals, encara que utilitza una simbologia primitiva, sense signe d'igualtat, sense exponents, ni signes radicals.

A l'aula s'utilitzen la traducció anglesa de l'art analític de Viète intentant mostrar el significat de les idees d' Anàlisi i Síntesi, l'àlgebra com un art i l'ús de la geometria dels antics. També, a tall d'exemple, es mostrarà la construcció geomètrica de la solució d'una equació de segon grau.

Vegeu com tractava Viète la solució de l'equació de segon grau i com en feia la justificació geomètrica.

Llibre tercer.Proposició I. Donada la mitjana de tres línies rectes proporcionals i la diferència entre els extrems, trobar l'extrem més petit. (Viète, 1970 : 56).

L'equació es plantejava a través de la proporció: $A : Z = Z : (A + B)$ essent A l' incògnita, B la diferència entre els extrems i Z la mitjana donada, $A.(A+B) = Z^2$. Per solucionar- la es basava en una proposició del llibre II, "donada l'àrea d'un rectangle (Z^2) i la diferència dels costats (B), trobar els costats". Per resoldre aquesta proposició deia que si al quadrat de la diferència dels costats, li afegeixes quatre vegades el rectangle (l'àrea), trobaràs el quadrat de la suma, en llenguatge actual:

$$[(A + B) - A]^2 + 4.A.(A+B) = [(A+B) + A]^2.$$

Llavors Viète explicava que així trobaves la suma i la diferència dels dos costats, i com ja havia demostrat en el teorema I del llibre I podíem saber els costats. Aquesta equació es trobava en l'obra *Zeteticorum libri quinque* (1593) que constitueix l'exemplificació i l'aplicació del mètode proposat a la *Isagoge* entesa com a nova forma de càlcul. Més tard, el1646, Viète va publicar *Effectionum Geometricarum Canonical Recensio*, on fa construccions geomètriques de les solucions de les equacions de segon i quart grau.

Vegeu la construcció corresponent a l'exemple anterior:

Proposició XII. *Donada la mitjana de tres quantitats proporcionals i la diferència dels extrems,trobar els extrems.*

[Això tracta de] la solució geomètrica d'un quadrat afectat per un costat.

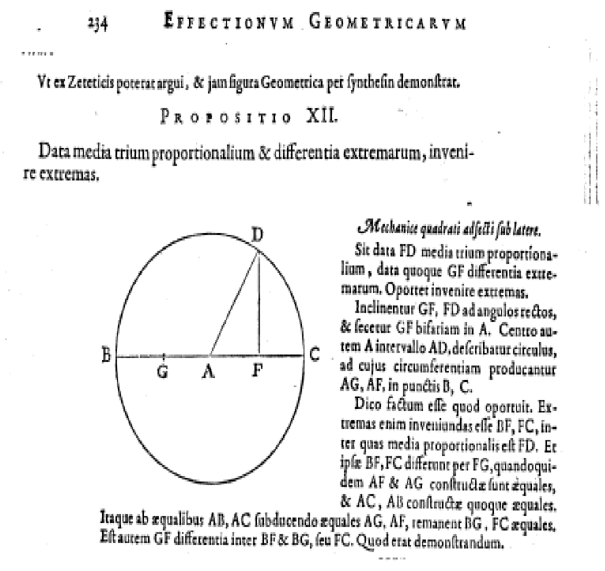
Sigui FD la mitjana de tres proporcionals i sigui GF la diferència entre els extrems.Trobeu els extrems.

Traçareu GF i FD formant angle recte i dividireu GF per la meitat en A. Descriureu un cercle de centre A i interval AD i estendreu la circumferència AG i AF donant els punts B i C.

Dic que fet això els extrems que busquem són BF i FC, entre els quals la mitjana proporcional és FD. I els mateixos BF i FC difereixen en FG, ja que AF i AG són iguals per construcció i AC i AB són també iguals per construcció. Llavors restant els iguals AG i AF dels iguals AB i AC, resten els iguals BG i FC. I també GF és la diferència entre BF i BG o bé FC. La qual cosa era el que volíem demostrar. (Viète, 1970:234)

Aquí Viète planteja l'equació mitjançant una proporció, en llenguatge actual, $(x + \mathrm{b}): c^{1/2} = c^{1/2} :x$.

Traceu *b* i $c^{1/2}$formant un angle recte i dividiu *b* per la meitat. Descriviu un cercle de radi la hipotenusa del triangle format per $b/2$ i $c^{1/2}$, llavors les solucions seran els segments FC i BF.



234 EFFECTIONVM GEOMETRICARVM

Vt ex Zeteticis poterat argui, & jam figura Geometrica per ſynthesin demonſtrat.

PROPOSITIO XII.

Data media trium proportionalium & differentia extremarum, invenire extremas.

Mechanice quadrati adfecti ſub latere.

Sit data FD media trium proportionalium, data quoque GF differentia extremarum. Oportet invenire extremas.

Inclinentur GF, FD ad angulos rectos, & ſecetur GF bifariam in A. Centro autem A intervallo AD, deſcribatur circulus, ad cujus circumferentiam producantur AG, AF, in punctis B, C.

Dico factum eſſe quod oportuit. Extremas enim inveniendas eſſe BF, FC, inter quas media proportionalis eſt FD. Et ipſæ BF, FC differunt per FG, quandoquidem AF & AG conſtructæ ſunt æquales, & AC, AB conſtructæ quoque æquales. Itaque ab æqualibus AB, AC ſubducendo æquales AG, AF, remanent BG, FC æquales. Eſt autem GF differentia inter BF & BG, ſeu FC. Quod erat demonſtrandum.

Figura 1 . Viète: *Efectionum Geometricarum Canonica Recensio* (1646)

L'obra de Viète va tenir una gran difusió i van sorgir molts textos d'àlgebra. Quan el treball de Viète es va conèixer, durant els primers anys del segle disset, els matemàtics van començar a considerar la utilitat dels procediments algebraics per resoldre procediments geomètrics.

La difusió de l'àlgebra de Viète es va fer a través de diferents textos d'àlgebra. Un exemple singular són els sis volums del *Cursus Mathematicus* (1634-1637-1642) de Pierre Hérigone (1580-1643). En el prefaci, Hérigone explicava que havia inventat un nou mètode per fer les demostracions més breus i intel·ligibles sense l'ús de cap altra llenguatge. El projecte d'Hérigone era introduir un llenguatge universal per treballar amb totes les parts de la matemàtica o sigui matemàtica pura i mixta.

En aquesta sessió després de fer un breu recorregut històric sobre el desenvolupament del llenguatge simbòlic s'analitzen algunes demostracions contingudes en el segon volum del *Cursus Mathematicus* d'Hérigone a la part algebraica.

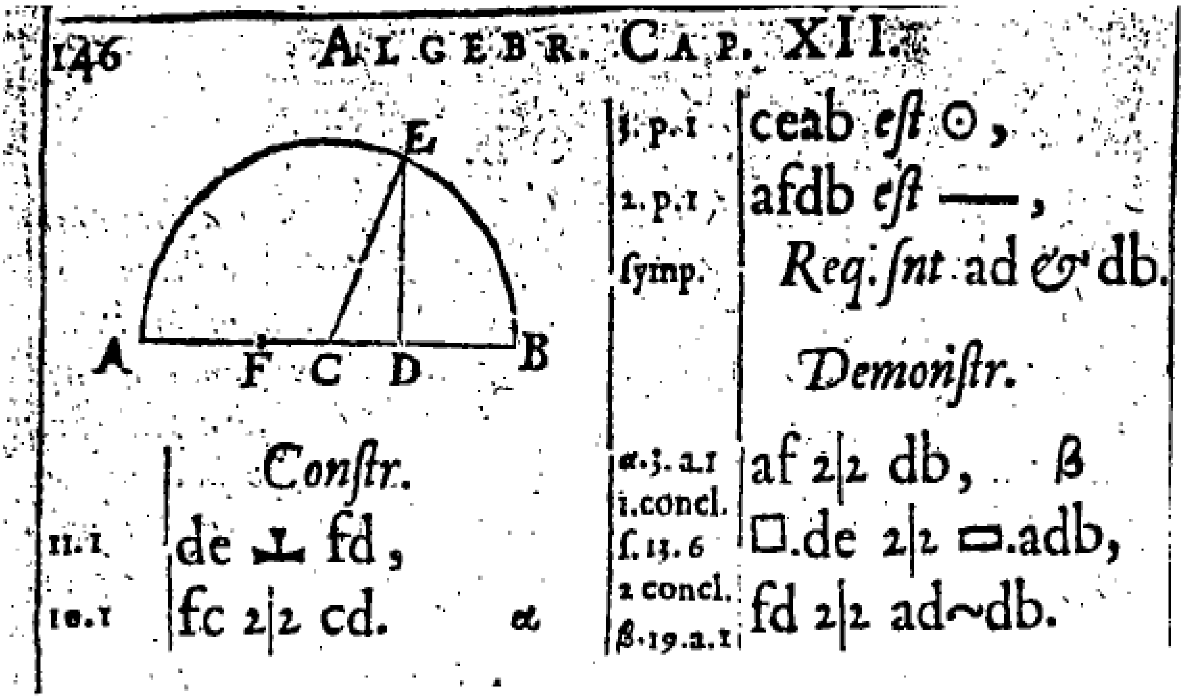

146 ALGEBR. CAP. XII.
E
A F C D B
Constr.
11.1 de ⊥ fd,
10.1 fc 2|2 cd. α
3.p.1 ceab est ⊙,
2.p.1 afdb est —,
symp. Req. snt ad & db.
Demonstr.
α.3.a.1 af 2|2 db, β
1.concl. f.13.6 □.de 2|2 ▭.adb,
2 concl. β.19.a.1 fd 2|2 ad∼db.

Figura 2. Pàgina del *Cursus Mathematicus* d'Hérigone

3.3 La *Géométrie* de René Descartes (1596-1650)

L'obra de Viète va tenir una gran difusió i van sorgir molts textos d'àlgebra. Quan el treball de Viète es va conèixer, durant els primers anys del segle disset, els matemàtics van començara considerar la utilitat dels procediments algebraics per resoldre procediments geomètrics. Entre els que es van adonar de la utilitat dels mètodes algebraics per resoldre problemes geomètrics podem citar Pierre de Fermat (1601-1655),tot i que la figura més influent va ser René Descartes (1596-1650).

Un dels punts rellevants dins de l'evolució de l'àlgebra i, en concret, per la resolució d'equacions va ser l'edició de l'obra de Descartes titulada *La Géométrie* (1637), que apareix com un apèndix del *Discours de la Méthode.* L'obra està dividida en tres llibres: el primer titulat "sobre els problemes de construcció que requereixen només línies rectes i cercles", el segon titulat "sobre la naturalesa de les línies corbes" i el tercer titulat "sobre la construcció dels problemes que són sòlids o quasi sòlids".

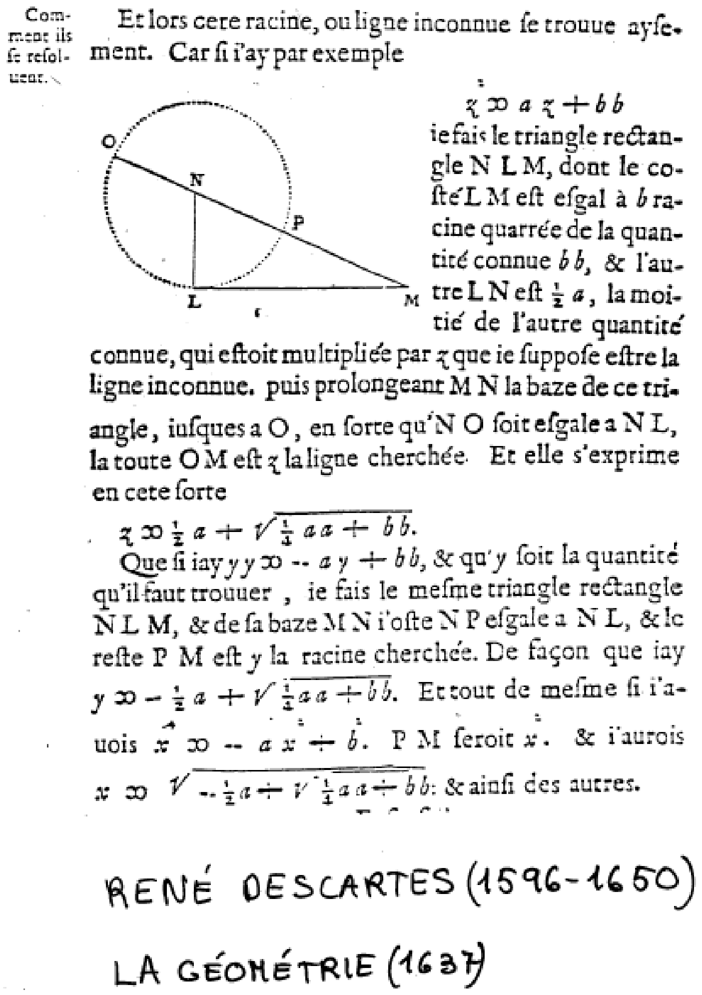
El programa de Descartes inclou dos aspectes: d'una banda, la classificació de corbes en algebraiques i mecàniques i, d'altra banda, les construccions geomètriques de les corbes.

A l'obra de Descartes l'àlgebra i la geometria es relacionen a través de les construccions de la intersecció de les corbes (quasi sempre paràboles i circumferències) que expressen les solucions d'equacions algebraiques (adequadament preparades) de grau més gran que dos.

Aquest treball de Descartes va suposar un punt de partida per a contemplar la geometria des d'una altra perspectiva. A més, conté la notació actual amb dues variants menors: escriu *xx*,*aa*,... en lloc de x^2, a^2... i no fa servir el signe d'igualtat nostre. Malgrat que s'hagi acabat imposant aquesta notació, durant els 50 o 60 anys posteriors les diferents obres d'àlgebra van adoptar notacions diverses.

Descartes començava el llibre I construint una àlgebra de segments: es mostrava com sumar, multiplicar, dividir i treure l'arrel quadrada de segments fent construccions geomètriques. Tot seguit, es feien les construccions geomètriques de les solucions dels problemes plans i s'explicava com construir la solució en una equació de segon grau.Vegem-ne un exemple:

Però si tinc per exemple $z^2 \infty az + bb$ *construeixo el triangle rectangle NLM, on el costat LM és igual a "b", arrel quadrada de la quantitat coneguda "bb", i l'altra LN és "½ a", la meitat de l'altra quantitat coneguda, que està multiplicada per "z" que se suposa ser la línia desconeguda. Llavors prolongant MN, base d'aquest triangle, fins a O, de manera que NO sigui igual a NL,la línia total OM és la línia buscada. I ella s'expressa d'aquesta manera* $z \infty 1/2\ a + (\ ¼\ aa + bb)^{1/2}$. (Descartes ,1954 : 12).


Com-ment ils se resol-uent.

Et lors cete racine, ou ligne inconnue se trouue ayse-ment. Car si i'ay par exemple

$z^2 \infty az + bb$

ie fais le triangle rectangle N L M, dont le costé L M est esgal à b racine quarrée de la quantité connue bb, & l'autre L N est $\frac{1}{2} a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui estoit multipliée par z que ie suppose estre la ligne inconnue. puis prolongeant M N la baze de ce triangle, iusques a O, en sorte qu'N O soit esgale a N L, la toute O M est z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete sorte

$z \infty \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} aa + bb}$.

Que si i'ay $yy \infty - ay + bb$, & qu'y soit la quantité qu'il faut trouuer, ie fais le mesme triangle rectangle N L M, & de sa baze M N i'oste N P esgale a N L, & le reste P M est y la racine cherchée. De façon que i'ay $y \infty - \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} aa + bb}$. Et tout de mesme si i'auois $x^4 \infty - ax^2 + b^2$. P M seroit x^2. & i'aurois $x \infty \sqrt{-\frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} aa + bb}}$: & ainsi des autres.

Figura 3. Pàgina de *La Géométrie* de Descartes

Cal remarcar que a l'obra de Descartes ja apareix la fórmula que emprem actualment a l'aula expressada en el simbolisme cartesià. Però, tot i que se sabien solucionar les equacions de segon grau i les de tercer i quart en casos particulars, en graus més elevat serà un repte. Més tard es va mostrar que aquestes equacions no són resolubles per radicals.

En aquesta lliçó es treballa el significat de l'obra matemàtica de Descartes dins la seva obra. S'analitzen les característiques del llenguatge algebraic dins la geometria cartesiana i el tractament de l'estructura de les equacions.

El desenvolupament de l'àlgebra de Viète per calcular àrees.

L'àlgebra de Viète va ser emprada per obtenir resultats nous. Explicarem com un exemple el cas de les quadratures de Pietro Mengoli (1625/26-1686). En la seva obra, Mengoli en un intent per trobar un mètode més general i més sòlidament fonamentat per a calcular quadratures, va utilitzar de manera singular eines algebraiques per a resoldre problemes de quadratures Tot i que Mengoli coneixia el valor de les quadratures que va investigar (l'havia obtingut amb el mètode dels indivisibles) Mengoli volia trobar-les amb un nou algorisme tot desenvolupant l'àlgebra de Viète. El nom de Pietro Mengoli apareix en el registre de la Universitat de Bolonya en el període 1648-1686, on havia substituït el seu mestre Cavalieri en la càtedra de mecànica. Es va graduar en filosofia el 1650 i tres anys més tard en lleis civils i canòniques. El 1660 va ser ordenat sacerdot i, des d'aquest moment i fins la seva mort, va ser prior de l'església de Santa Maria Magdalena de Bolonia.

A l'aula presentarem com Mengoli emprava el llenguatge algebraic per obtenir infinites quadratures basant-se en el triangle aritmètic de Pascal i emprant l'àlgebra de Viète.

Bibliografia. Tema 3.

BOS, H., "On the representation of curves in Descartes' *Géométrie*", *Archive for the History of Exact Sciences*", 24, 1981, pp. 295-338.

BOS, H.,"La structure de la *Géométrie* de Descartes", *Revue d'histoire des sciences*", 51, 1998, pp. 291-317.

BOS, H., *Redefining Geometrical Exactness,* Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, New York, Springer, 2001.

DESCARTES, R., *The Geometry of René Descartes,* D. E. Smith i M. L. Latham ed., Nova York, Dover, 1954.

DESCARTES, R., article al D.S.B.FREGUGLIA, P., *Ars analytica: matematica e methodus nella seconda metà del Cinquecento*, Bramante Editrice, Varese, 1988.

FREGUGLIA, P., "Algebra e Geometria in Viète", *Bollettino di storia delle scienze matematiche,* 9**,** 1989, 49-90.

GIUSTI, E., "Algebra and Geometry in Bombelli and Viète", *Bollettino di Storia delle scienze matematiche,* 12, 1992, 303-28.

GIUSTI, E., **"**La "Géométrie" di Descartes tra numeri e grandezze", *Giornale critico della filosofia italiana,* 66(68), 1987, pp. 409-432.

HERIGONE, P., (1634-37-42). *Cursus Mathematicus,* Paris.

MAHONEY, Michael S., *The mathematical career of Pierre de Fermat*, Princeton, Princeton University Press, 1973.

MAHONEY , M. S. (1980). «The beginnings of algebraic thought in the seventeenth century», *Descartes' philosophy, mathematics and phisics*, Gaukroger, S. (ed.). Totowa/ Brighton, Barnes and Noble/Harvester, 141-156.

MANCOSU, P., "The Algebraization of Mathematics", *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the seventeenth century*, New York, Oxford University Press, 1996, 84-91.

MASSA ESTEVE, Mª R.,."Mengoli on *Quasi Proportions*", *Historia Mathematica,* 24, (1997) 257-280.

MASSA ESTEVE, Mª R., (1998), *Estudis Matemàtics de Pietro Mengoli (1625-1686): Taules triangulars i quasi proporcions com a desenvolupament de l'àlgebra de Viète*, tesi doctoral, Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, http://www.tdx.cat/TDX-0506108-144948.

MASSA-ESTEVE, M. R. I altres, *Ciència, Filosofia i Societat en René Descartes,* 1999 (1ra ed. 1996, 2na ed. 1997), I. B. Carles Riba, 1-120.

MASSA ESTEVE, Mª R., " Las relaciones entre el álgebra y la geometría en el siglo XVII", *Llull*, vol. 24, (2001), 705-725.

MASSA-ESTEVE, Mª R., "Algebra and geometry in Pietro Mengoli (1625-1686)", *Historia Mathematica*, 2006, 33, 82-112.

MASSA-ESTEVE, Mª R. "Symbolic language in the Early Modern Mathematics: The Algebra of Pierre Hérigone (1580-1643)", *Historia Mathematica,* 35(4), 2008.

MASSA-ESTEVE, Mª Rosa - DELSHAMS, Amadeu, "Euler's Beta integral in Pietro Mengoli's Works", *Archive for History of Exact Sciences*, 63 (3), 2009, 325-356 .

MENGOLI, P. (1659). *Geometriae Speciosae Elementa,* Bolonia.

MENGOLI, P. (1672). *Circolo,* Bolonia.

PARSHALL, Karen Hunger, "The art of Algebra from Al-Khwarizmi to Viète: a study in the natural selection of ideas", *History of Science*, 26, 1988, 129-164.

PEPE, Luigi, "Note sulla diffusione della *Géométrie* di Descartes in Italia nel secolo XVII", *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche,* Vol. II(1982) fasc. 2, 249-288.

PLA-VIADER, *Descartes. La Geometria*. Publicacions de l'Institut d'Estudis Catalans, 1998.

PYCIOR, Helen, *Symbols, Impossible Numbers, and Geometric Entanglements: British algebra through the commentaries on Newton's Universal arithmetik.* Cambridge, Cambridge University Press, 1997.

VAN DER WAERDEN, B. L.,*A History of Algebra. From Al-khwarizmi to Emmy Noether*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1980.

VAN EGMOND, Warren,"How Algebra came to France", *Mathematics from manuscript to print,* Hay, Cynthia, ed., Oxford, 1988, 127-144.

VIETE, F., article al D. S. B., 18-25.

VIETE, F., *Opera Mathematica* per Francisci A. Schooten, Georg Olms Verlag Hildesheim, New York, 1970, 1-41.

VIETE, F., *The Analytic Art,* T R Witmer tr.,Kent State University Press, Kent, Ohio, 1983, 1-43.